Logik II: Modelltheorie

Martin Bays

Universität Münster, Wintersemester 2019-2020*

version 1fcd14a6 de†

Inhaltsverzeichnis

†These notes are also available in English.

1 Überblick

- Ein Hauptziel von Modelltheorie ist das Verständnis der definierbaren Mengen einer Struktur $\mathcal{M}$, d.h. die Teilmengen der Potenzen $\mathcal{M}^n$, die durch Formeln definiert sind.

- Gödel vs Tarski: Die definierbaren Mengen einiger Strukturen sind unkontrollierbar wild, und werden komplizierter, wenn wir mehr Quantoren erlauben. Zum Beispiel: In $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ können wir bereits mit nur einem unbeschränkten Quantor jede rekursiv aufzählbare Menge definieren.

  Es ist jedoch ein verwunderlicher Fakt, dass viele Strukturen, die wichtig in der Mathematik sind, diese Gödelschen Phänomene vermeiden und "zahm" sind. Ihre definierbaren Mengen sind kontrolliert (insbesondere sind alle durch Formeln mit wenigen Quantoren definierbar[1]), ihre Theorien sind oft entscheidbar und manchmal sind die Modelle ihrer Theorien bis auf Isomorphie klassifizierbar.

Beispiele:

- $(\mathbb{C}; +, \cdot)$, $(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_p; +, \cdot)$;
- $(\mathbb{Q}; <)$;
- Vektorräume;
- $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{N}; +, <)$, $(\mathbb{N}; \cdot)$ (aber nicht $(\mathbb{N}; \cdot, <)$!);
- $(\mathbb{R}; +, \cdot, x \mapsto e^x)$;
- $(\mathbb{C}; +, \cdot, x \mapsto x^\zeta)$ (für die meisten $\zeta \in \mathbb{C}$);
- Kompakte Lie-Gruppen z.B. $(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}); *)$;
- $(\mathbb{F}_{p^*}; +, \cdot)$ für eine "unendliche" (pseudoendliche) Primzahl p^*;
- Kompakte komplexe Mannigfaltkeiten (komplexe Tori, Calabi-Yau Mannigfaltkeiten, usw.);
- Differenziellgleichungen und differenzgleichungen (in einem gewissen Sinn);

Wir betrachten in diesem Kurs nur einen Bruchteil dieses Reichtums, aber wir entwickeln Werkzeuge mit breiter Anwendbarkeit.

- Wir studieren oft eine Struktur durch die Betrachtung anderer Modelle ihrer Theorie. Insbesondere entspricht eine "Zahmheit" der Klasse von Modellen einer Theorie oft einer "Zahmheit" der definierbaren Mengen. Wir untersuchen in diesem Kurs die folgende starke Version dieser Korrespondenz.

  Eine Theorie T ist **κ-kategorisch**, wenn sie ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Modell der Mächtigkeit κ hat. Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche Struktur in einer abzählbaren Sprache.

  - Ryll-Nardzewski: $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist $\aleph_0$-kategorisch genau dann, wenn es für jedes $n \in \omega$ nur endliche viele $\mathcal{L}$-definierbare Teilmengen von $\mathcal{M}^n$ gibt.
  - Baldwin-Lachlan: Für eine überabzählbare Kardinalzahl κ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ κ-kategorisch genau dann, wenn $\mathcal{M}$ prim und minimal über einer streng minimalen Menge, die über dem Primmodell definiert ist, ist.

    (Wir definieren diese Begriffe später. Eine streng minimale Menge ist eine besonders einfache Struktur, und wenn $\mathcal{M}$ prim und minimal über ihr ist, sind die definierbaren Mengen von $\mathcal{M}$ "konstruiert" (in einem gewissen Sinn) durch die definierbaren Mengen von der streng minimalen Menge.)

2 Grundbegriffe

In diesem Kurs arbeiten wir in ZFC. Eine Menge A ist *abzählbar*, wenn $|A| \leq \aleph_0$.

[1] Wir betrachten z.B. $\exists x, y.$ wie einen Quantor statt zwei.

2.1 Syntax und Struktur

- Eine (ein-sortige) **Sprache** (erster Stufe) ist eine Menge $\mathcal{L}$ von Relationszeichen, Funktionszeichen und Konstanten.
- Eine **$\mathcal{L}$-Struktur** $\mathcal{M} = (M; (R^{\mathcal{M}})_R, (f^{\mathcal{M}})_f, (c^{\mathcal{M}})_c)$ ist eine nicht-leere Menge M mit Interpretationen der Zeichen von $\mathcal{L}$:
  - $R^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^n$ für ein n-st Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$;
  - $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ für ein n-st Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$;
  - $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ für eine Konstante $c \in \mathcal{L}$.

  Oft bezeichnen wir auch die Grundmenge M als $\mathcal{M}$.

  Manchmal betrachten wir Konstanten als 0-st Funktionszeichen.
- Ein **$\mathcal{L}$-Term** ist eine Variable, eine Konstante, oder $f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei t_i $\mathcal{L}$-Terme und f ein n-st Funktionszeichen sind.
- Eine **atomare $\mathcal{L}$-Formel** ist $t_1 \doteq t_2$ oder $R(t_1, \ldots, t_n)$ oder $\top$, wobei t_i $\mathcal{L}$-Terme und R ein n-st Relationszeichen sind. Dabei ist $\top$ die *immer wahre Aussage*; $\mathcal{M} \models \top$ für jede Struktur $\mathcal{M}$.
- Eine **$\mathcal{L}$-Formel** ist eine atomare $\mathcal{L}$-Formel oder $\neg\phi$ oder $(\phi \wedge \phi')$ oder $\exists x.\, \phi$, wobei ϕ, ϕ' $\mathcal{L}$-Formeln und x eine Variable sind.
- Ein **$\mathcal{L}$-Aussage** ist eine $\mathcal{L}$-Formel, die keine freien Variablen hat. Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ und ein $\mathcal{L}$-Aussage σ ist $\mathcal{M} \models \sigma$ rekursiv definiert.
- Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
(\phi \vee \psi) &\mapsto \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
(\phi \to \psi) &\mapsto (\neg\phi \vee \psi) \\
(\phi \leftrightarrow \psi) &\mapsto ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \\
\forall x.\, \phi &\mapsto \neg\exists x.\, \neg\phi \\
x \not\doteq y &\mapsto \neg x \doteq y \\
\bot &\mapsto \neg\top
\end{aligned}$$

- Wir definieren auch Abkürzungen für Konjunktionen und Disjunktionen von endlichen Mengen von Formeln:

$$\begin{aligned}
\bigwedge \emptyset &:= \top \\
\bigwedge (\Phi \cup \{\phi\}) &:= \left(\bigwedge \Phi \wedge \phi\right) \\
\bigvee \emptyset &:= \bot \\
\bigvee (\Phi \cup \{\phi\}) &:= \left(\bigvee \Phi \vee \phi\right).
\end{aligned}$$

- Wenn $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}'$-Struktur ist, ist $\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}$ die entsprechende $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist $\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}$ das **Redukt** von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{L}$, und $\mathcal{M}$ eine **Expansion** von $\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}$ zu $\mathcal{L}'$.

- Wenn $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur ist und $A \subseteq \mathcal{M}$, ist die **Expansion durch Konstanten für** A die Expansion $\mathcal{M}_A$ von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}\dot{\cup}A$ definiert durch $a^{\mathcal{M}_A} := a$.

- Wir schreiben ein Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n \geq 0)$ als $\overline{a}$, und wir schreiben $|\overline{a}|$ für seine Länge, $|\overline{a}| = n$. Für eine Menge A setzen wir $A^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} A^n$, die Menge aller Tupel von A.

- Wir schreiben eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ als $\phi(\overline{x})$, wenn $\overline{x}$ ein Tupel von verschiedenen Variablen ist und die freie Variablen von ϕ unter $x_1, \ldots, x_{|\overline{x}|}$ sind. Falls $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur ist und $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|}$, ist $\phi(\overline{a})$ die $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Aussage, in der x_i durch a_i ersetzt $(i = 1, \ldots, |\overline{x}|)$ werden. Dann bedeutet $\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a})$, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{M}} \vDash \phi(\overline{a})$.

  Dann ist die Menge **definiert durch** $\phi(\overline{x})$ in $\mathcal{M}$
  $$\phi(\mathcal{M}) := \{\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|} : \mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a})\} \subseteq \mathcal{M}^{|\overline{x}|}.$$
  (Eigentlich hängt dies von der Wahl vom Tupel $\overline{x}$ sowie von ϕ ab.)

  Ähnlich wenn $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|}$, schreiben wir $\phi(\overline{a}, \overline{y})$ für die $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel, in der x_i durch a_i ersetzt werden.

- Ein **partieller Isomorphismus** von $\mathcal{L}$-Strukturen ist eine partielle Funktion $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$, sodass für jede atomare $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$ und alle $\overline{a} \in \operatorname{dom}\theta^{|x|}$
  $$\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\theta(\overline{a})).$$
  Wenn dies für *jede* $\mathcal{L}$-Formel ϕ gilt, heißt θ eine **partielle elementare Abbildung**.

- Ein *totaler* partieller Isomorphismus θ heißt **Einbettung** $\theta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$.

- Eine *totale* partielle elementare Abbildung θ heißt **elementare Einbettung** $\theta : \mathcal{M} \overset{\preceq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}$.

- Eine *surjektive* Einbettung heißt **Isomorphismus** $\theta : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}$.

- Eine **Unterstruktur** (bzw. **elementare Unterstruktur**) einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ auf eine Teilmenge von $\mathcal{N}$, sodass die Inklusion eine Einbettung (bzw. elementare Einbettung) ist.

  <u>Konvention</u>: Wenn $\mathcal{L}$ keine Konstanten hat, erlauben wir auch die "leere Struktur" $\emptyset$ als eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur jeder $\mathcal{L}$-Struktur (obwohl $\emptyset$ keine $\mathcal{L}$-Struktur ist![2]).

- Wir schreiben $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ für eine Unterstruktur[3], und $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ für eine elementare Unterstruktur.

- Wenn $A \subseteq \mathcal{M}$ eine Teilmenge einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist, sei
  $$\langle A\rangle^{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} := \bigcap\{\mathcal{B} : A \subseteq \mathcal{B} \leq \mathcal{M}\} \leq \mathcal{M}$$

[2] In mancherlei Hinsicht ist es besser, die leere Struktur als Struktur zu erlauben. Einige Autoren tun dies.

[3] Viele Autoren schreiben $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ für die Unterstruktur Relation.

die $\mathcal{L}$-Unterstruktur, die von A erzeugt ist.

Bemerkung: Wenn $\mathcal{L}$ keine Konstante hat, $\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Lemma 2.1. $|\langle A\rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}}| \leq \max(|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0)$.

Beweis. Sei $A_0 := A$ und, mit Konstanten als 0-st Funktionszeichen betrachtet,

$$A_{i+1} := A_i \cup \{f^{\mathcal{M}}(\overline{a}) : f \in \mathcal{L} \text{ ein } n\text{-st Funktionszeichen}, \ \overline{a} \in A_i^n, \ n \geq 0\}.$$

Dann ist $\langle A\rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i\in\omega} A_i$, und $|A_{i+1}| \leq |A_i| + |\mathcal{L}| \cdot \max(|A|, \aleph_0) \leq \max(|A_i|, |\mathcal{L}|, \aleph_0)$. Daher $|A_i| \leq \max(|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0)$ für alle i. Somit $|\bigcup_i A_i| \leq \max(|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0)$. □

- Wir können immer eine Einbettung zu einer Inklusion durch die Anwendung eines Isomorphismus verwandeln:

  Lemma 2.2. *Sei $\theta : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ eine Einbettung von $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann gibt es einen Isomorphismus $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, sodass $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}'$ und $\sigma \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.*

  Beweis. Zuerst sei $\sigma : \mathcal{B} \to B'$ eine Bijektion mit eine Menge $B' \supseteq \mathcal{A}$ mit $\sigma \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Sei $\mathcal{B}'$ die $\mathcal{L}$-Struktur auf B', für die σ ein Isomorphismus ist. Dann ist $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} = \sigma \circ \theta$ eine Einbettung, also gilt $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}'$. □

2.2 Theorien

- Eine **$\mathcal{L}$-Theorie** ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.
- Die **Theorie** einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist

  $$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\sigma : \mathcal{M} \models \sigma, \ \sigma \text{ ein } \mathcal{L}\text{-Aussage ist}\}.$$

- Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist ein **Modell** einer $\mathcal{L}$-Theorie T,

  $$\mathcal{M} \models T,$$

  wenn $\mathcal{M} \models \sigma$ für alle $\sigma \in T$.

- $T \models \sigma$ bedeutet: $\mathcal{M} \models \sigma$ für jedes $\mathcal{M} \models T$. Wir schreiben auch $T \vdash \sigma$.

  $T \models T'$ oder $T \vdash T'$ bedeutet: $T \models \sigma$ für alle $\sigma \in T'$.

  $T \models_{T''} T'$ oder $T \vdash_{T''} T'$ bedeutet: $T \cup T'' \models T'$.

- T heißt **konsistent**, wenn sie ein Modell hat.

  Bemerkung 2.3. T ist konsistent gdw $T \not\models \perp$.

- Eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie T heißt **vollständig**, wenn für alle $\mathcal{L}$-Aussagen σ

  $$T \models \sigma \quad \text{oder} \quad T \models \neg\sigma.$$

- $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ heißen **elementar äquivalent**, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Bemerkung 2.4. Eine konsistente Theorie T ist genau dann vollständig, wenn $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ für jede $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$.

Bemerkung 2.5. Wenn A eine gemeinsame Teilmenge von $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ ist, ist $\mathrm{id}_A : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ partiell elementar gdw $\mathcal{M}_A \equiv \mathcal{N}_A$.

Insbesondere, wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, gilt $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ gdw $\mathcal{M}_\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}_\mathcal{M}$.

Die $\mathcal{L}_\mathcal{M}$-Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_\mathcal{M})$ heißt das **elementare Diagramm** von $\mathcal{M}$.

3 Ultraprodukte

Sei I eine Menge. Eine nicht-leere Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt **Filterbasis**, wenn

- $X, Y \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{B}.\, X \cap Y \supseteq Z$;
- $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Eine maximale Filterbasis $\mathcal{U}$ heißt **Ultrafilter**. Dazu äquivalent, $\mathcal{U}$ ist eine Filterbasis, und für alle $X \subseteq I$ gilt

$$X \in \mathcal{U} \quad \text{oder} \quad I \setminus X \in \mathcal{U}.$$

Als direkte Folgerung aus dem Zornschen Lemma, haben wir

Fakt 3.1. *Jede Filterbasis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(I)$ lässt sich zu einem Ultrafilter $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ erweitern.*

Bemerkung 3.2. Fakt 3.1 ist kein Satz von ZF. Es ist echt schwächer als das Auswahlaxiom modulo ZF.

Bemerkung 3.3. Ultrafilter sind *aufwärts geschlossen*: wenn $X \subseteq Y$, gilt $X \in \mathcal{U} \Rightarrow Y \in \mathcal{U}$. Eine Filterbasis, die aufwärts geschlossen ist, heißt *Filter*.

Wenn $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ein Ultrafilter ist und a_i Elemente von Mengen A_i ($i \in I$) sind, ist der **Ultralimes** $\lim_{i \to \mathcal{U}} a_i$ die Äquivalenzklasse $(a_i)_i / \sim^\mathcal{U}$ von der Sequenz $(a_i)_i$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(a_i)_i \sim^\mathcal{U} (a'_i)_i \quad \text{gdw} \quad \{i : a_i = a'_i\} \in \mathcal{U}.$$

Wenn A_i Mengen sind, ist das **Ultraprodukt** die Menge aller Ultralimiten,

$$\prod_{i \to \mathcal{U}} A_i := {}^{\prod_{i \in I} A_i}\!/\!_{\sim^\mathcal{U}} = \left\{ \lim_{i \to \mathcal{U}} a_i : a_i \in A_i \right\}.$$

Wir haben $\lim_{i \to \mathcal{U}}(a_i, b_i) = (\lim_{i \to \mathcal{U}} a_i, \lim_{i \to \mathcal{U}} b_i)$.

Für Funktionen $f_i : A_i \to B_i$ definieren wir

$$\lim_{i \to \mathcal{U}} f_i : \prod_{i \to \mathcal{U}} A_i \to \prod_{i \to \mathcal{U}} B_i$$

durch

$$(\lim_{i \to \mathcal{U}} f_i)(\lim_{i \to \mathcal{U}} a_i) := \lim_{i \to \mathcal{U}} f_i(a_i).$$

Wenn $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ $\mathcal{L}$-Strukturen sind, ist das **Ultraprodukt** $\mathcal{M} = \prod_{i \to \mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ die $\mathcal{L}$-Struktur sodass

- $\mathcal{M} := \prod_{i\to\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ als Mengen;
- $\mathcal{M} \vDash R(\lim_{i\to\mathcal{U}} \overline{a}_i) \;\Leftrightarrow\; \{i : \mathcal{M}_i \vDash R(\overline{a}_i)\} \in \mathcal{U}$ (für $R \in \mathcal{L}$ ein Relationszeichen);
- $f^{\mathcal{M}} := \lim_{i\to\mathcal{U}} f^{M_i}$ (für $f \in \mathcal{L}$ ein Funktionszeichen);
- $c^{\mathcal{M}} := \lim_{i\to\mathcal{U}} c^{M_i}$ (für $c \in \mathcal{L}$ eine Konstante).

Satz 3.4 (Łoś)**.** *Für $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}_i$, eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$, und $\overline{a}_i \in \mathcal{M}_i$,*

$$\prod_{i\to\mathcal{U}} M_i \vDash \phi(\lim_{i\to\mathcal{U}} \overline{a}_i) \quad gdw \quad \{i : M_i \vDash \phi(\overline{a}_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis. ÜA. □

Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ heißt **Hauptultrafilter**, wenn es $i_0 \in I$ gibt, sodass $\mathcal{U} = \{X \subseteq I : i_0 \in X\}$. Dann $\prod_{i\to\mathcal{U}} \mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}_{i_0}$.

Beispiel 3.5. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(P)$ ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist, auf der Menge $P \subseteq \mathbb{N}$ von Primzahlen. Dann ist das Ultraprodukt von endlichen Körpern $\prod_{p\to\mathcal{U}}(\mathbb{F}_p; +, \cdot)$ ein Körper mit Charakteristik 0 (ein "pseudo-endlicher Körper").

Wenn $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ein Ultrafilter ist, und $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur ist, ist die **Ultrapotenz** $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} := \prod_{i\to\mathcal{U}} \mathcal{M}$.

Lemma 3.6. *In Bezug auf die* **diagonale Einbettung** $a \mapsto \lim_{i\to\mathcal{U}} a$ *ist $\mathcal{M}$ eine elementare Unterstruktur, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$.*

Beweis. ÜA. □

Beispiel 3.7. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist. Sei $(\mathbb{R}^*; +, \cdot) := (\mathbb{R}; +, \cdot)^{\mathcal{U}}$ (ein "nicht-standarder Reeller Körper"). Sei

$$\epsilon := \lim_{n\to\mathcal{U}} \frac{1}{n+1} \in \mathbb{R}^*.$$

Dann $0 < \epsilon < r$ für jedes $r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$.

4 Kompaktheit

Satz 4.1 (Kompaktheit)**.** *Wenn jede endliche Teilmenge einer $\mathcal{L}$-Theorie T konsistent ist, ist T konsistent.*

Beweis. Sei $\mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T) := \{T' \in \mathcal{P}(T) : |T'| < \aleph_0\}$ die Menge von endlichen Teilmengen von T. Sei $\mathcal{M}_{T'} \vDash T'$ für $T' \in \mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T)$.

Für $T' \in \mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T)$, sei $[T'] = \{T'' \in \mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T) : T' \subseteq T''\} \subseteq \mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T)$. Sei $\mathcal{B} = \{[T'] : T' \in \mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T))$. Dann ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, weil $[T'] \cap [T''] = [T' \cup T'']$, und $[T'] \neq \emptyset$ weil $T' \in [T']$, und $\mathcal{B} \neq \emptyset$ da $[\emptyset] \in \mathcal{B}$. Nach Fakt 3.1, sei $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{B}$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{P}^{\mathrm{end}}(T)$.

Sei $\mathcal{M} = \prod_{T'\to\mathcal{U}} \mathcal{M}_{T'}$.

Dann gilt für $\sigma \in T$

$$\{T' : \mathcal{M}_{T'} \vDash \sigma\} \supseteq \{T' : \sigma \in T'\} = [\{\sigma\}] \in \mathcal{U},$$

und nach Łoś, $\mathcal{M} \vDash \sigma$.

Dann $\mathcal{M} \vDash T$, und damit ist T konsistent. □

Lemma 4.2 (Trennungslemma)**.** *Seien T_1 und T_2 konsistente $\mathcal{L}$-Theorien, und Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen, die unter $\wedge$ und $\vee$ abgeschlossen ist. Dann sind äquivalent:*

(i) Wenn $\mathcal{M}_1 \vDash T_1$ und $\mathcal{M}_2 \vDash T_2$, gibt es $\sigma \in \Sigma$, sodass $\mathcal{M}_1 \vDash \sigma$ und $\mathcal{M}_2 \vDash \neg\sigma$.

(ii) Es gibt $\sigma \in \Sigma$ mit $T_1 \vDash \sigma$ und $T_2 \vDash \neg\sigma$.

Wir sagen dann, dass Σ T_1 von T_2 **trennt***.*

Beweis.

(i) $\Leftarrow$ (ii): Klar.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mathcal{M}_1 \vDash T_1$. Für $\mathcal{M}_2 \vDash T_2$ gibt es nach (i) $\sigma_{\mathcal{M}_2} \in \Sigma$ mit $\mathcal{M}_1 \vDash \sigma_{\mathcal{M}_2}$ und $\mathcal{M}_2 \vDash \neg\sigma_{\mathcal{M}_2}$. Dann ist $T_2 \cup \{\sigma_{\mathcal{M}_2} : \mathcal{M}_2 \vDash T_2\}$ inkonsistent. Daher folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass es eine endliche Konjunktion $\sigma_{\mathcal{M}_1}$ von der $\sigma_{\mathcal{M}_2}$ gibt, sodass $T_2 \vDash \neg\sigma_{\mathcal{M}_1}$. Dann $\sigma_{\mathcal{M}_1} \in \Sigma$ weil Σ unter $\wedge$ abgeschlossen ist, und $\mathcal{M}_1 \vDash \sigma_{\mathcal{M}_1}$.

Nun ist $T_1 \cup \{\neg\sigma_{\mathcal{M}_1} : \mathcal{M}_1 \vDash T_1\}$ inkonsistent. Daher folgt es aus dem Kompaktheitssatz und dem Fakt, dass Σ unter $\vee$ abgeschlossen ist, dass es eine endliche Disjunktion $\sigma \in \Sigma$ von der $\sigma_{\mathcal{M}_1}$ gibt, sodass $T_1 \vDash \sigma$. Dann $T_2 \vDash \neg\sigma$.

□

5 Quantorenelimination

5.1 Definitionen

Definition 5.1. Eine Formel ist **quantorenfrei** (**qf**), wenn sie keinen Quantor enthält.

Definition 5.2. $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(\overline{x})$ und $\psi(\overline{x})$ sind **äquivalent modulo** einer $\mathcal{L}$-Theorie T, geschrieben $\phi(\overline{x}) \leftrightarrow_T \psi(\overline{x})$, wenn

$$T \vDash \forall\overline{x}.\,(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})).$$

Ähnlich, $\phi(\overline{x}) \rightarrow_T \psi(\overline{x})$ wenn $T \vDash \forall\overline{x}.\,(\phi(\overline{x}) \rightarrow \psi(\overline{x}))$.

(Wie immer erlauben wir hier den Fall $|\overline{x}| = 0$, d.h. den Fall, dass ϕ und ψ Aussagen sind.)

Definition 5.3. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T besitzt **Quantorenelimination** (**QE**), wenn jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$ äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien Formel $\psi(\overline{x})$ ist.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ besitzt QE, wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ QE besitzt.

5.2 Diskussion

Bemerkung 5.4. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ besitzt QE genau dann, wenn jede $\mathcal{L}$-definierbare Menge durch eine qf $\mathcal{L}$-Formel definiert ist.

Beispiel 5.5. $(\mathbb{R}; +, -, \cdot, 0, 1)$ besitzt nicht QE: Die Ordnung $x < y$ ist durch $\exists z.\ (z \neq 0 \wedge x + z \cdot z = y)$ definierbar, aber sie ist durch keine qf Formel definierbar.

Bemerkung 5.6. Wenn $\mathcal{L}$ keine Konstanten hat, sind die einzigen qf Aussagen bis auf Äquivalenz $\top$ und $\bot$. Daher ist jede konsistente $\mathcal{L}$-Theorie mit QE vollständig.

Beispiel 5.7. Sei $\mathcal{L}_\emptyset$ die leere Sprache $\mathcal{L}_\emptyset := \emptyset$. Wir werden unten sehen, dass wenn X eine unendliche Menge ist, die $\mathcal{L}_\emptyset$-Struktur $(X;)$ QE besitzt. Außerdem werden wir sehen, dass $T_\infty := \{\exists x_1, \ldots, x_n.\ \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j : n \in \omega\}$ QE besitzt. Daher axiomatisiert T_∞ die Theorie $\mathrm{Th}((X;))$.

Wenn $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und Φ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln ist, ist die **Expansion durch Relatationen für** Φ die Expansion von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{L} \cup \{R_\phi : \phi \in \Phi\}$, wobei R_ϕ durch $\phi(\mathcal{M})$ interpretiert wird. Sie hat die gleichen definierbaren Mengen wie $\mathcal{M}$.

Wenn $\mathcal{M}$ nicht QE besitzt, können wir versuchen, QE zu erreichen, indem $\mathcal{M}$ durch Relationen für nicht-qf Formeln expandieren. Z.B.:

Fakt 5.8 (Tarski-Seidenberg)**.** $(\mathbb{R}; +, -, \cdot, 0, 1, <)$ *besitzt QE.*

Wir können immer QE in einer trivialen Weise erreichen:

Bemerkung 5.9. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann besitzt die Expansion durch Relationen für *alle* $\mathcal{L}$-Formeln (die "Morleyisierung" von $\mathcal{M}$) QE.

Für einige besonders unartige Strukturen gibt es keine wirklich bessere Wahl, als die Morleyisierung zu nehmen:

Fakt 5.10 ("Die Arithmetische Hierachie ist echt.")**.** *Für alle $n \in \omega$ besitzt die Expansion von $(\mathcal{N}; +, \cdot)$ durch Relationen für alle Formeln mit hochstens n unbeschränkten Quantoren (dazu äquivalent, alle Formeln der Form $\exists \overline{x}_1 . \neg \exists \overline{x}_2 . \ldots \neg \exists \overline{x}_n . \phi$, wobei ϕ keinen unbeschränkten Quantor hat) nicht QE.*

5.3 Kriterium für QE

Definition 5.11.

- Eine **basic** Formel[4] ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel.
- Eine Formel $\phi(x)$ heißt **primitiv existentiell**, wenn sie die Form $\exists y.\ \bigwedge_i \psi_i(y, \overline{x})$ hat, wobei jede ψ_i basic ist.

Lemma 5.12. *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie. Wenn jede primitiv existentielle $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$ äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien Formel $\psi(\overline{x})$ ist, besitzt T QE.*

Beweis. Wir zeigen durch Induktion über Komplexität, dass jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$ äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien Formel $\psi(\overline{x})$ ist. Für atomare ϕ ist dies klar. Für $\phi = \phi' \wedge \phi''$ oder $\phi = \neg\phi'$ folgt es sofort per Induktion.

Für $\phi = \exists y.\ \phi'$: aus der Induktionsvoraussetzung gilt $\phi' \leftrightarrow_T \psi$ mit ψ quantorenfrei. Wir können annehmen, dass ψ in disjunktiver Normalform ist: $\psi = \bigvee_i \bigwedge_j \psi_{ij}$, wobei jede ψ_{ij} basic ist. Somit $\phi \leftrightarrow_T \bigvee_i \exists y.\ \bigwedge_j \psi_{ij}$. Jede Formel $\exists y.\ \bigwedge_j \psi_{ij}$ ist primitiv existentiell, und die Behauptung folgt aus der Voraussetzung. $\square$

[4] Auch auf Englisch als "/literal/" bekannt.

Definition 5.13. Das **Diagramm** einer $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ einer $\mathcal{L}$-Struktur ist die $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Theorie

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) := \mathrm{qfTh}(\mathcal{A}_\mathcal{A}) := \{\sigma : \sigma \text{ qf } \mathcal{L}(\mathcal{A})\text{-Aussage}, \ \mathcal{A}_\mathcal{A} \vDash \sigma\}.$$

Lemma 5.14 (Diagrammmethode)**.** *Bis auf Isomorphie sind die Modelle von* $\mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ *genau* $\mathcal{M}_\mathcal{A}$*, wobei* $\mathcal{M}$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur ist und* $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}$*.*

Satz 5.15. *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theory. Dann sind äquivalent:*

(i) T besitzt QE.

(ii) Wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ eine gemeinsame $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ haben, gilt $\mathcal{M}_\mathcal{A} \equiv \mathcal{N}_\mathcal{A}$.

(ii') "T ist **unterstrukturvollständig***": Wenn $\mathcal{M} \vDash T$ und $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur ist, ist $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ vollständig.*

(iii) Wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ eine gemeinsame $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ haben und $\overline{a} \in \mathcal{A}^{<\omega}$ und $\phi(\overline{x})$ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}$-Formel ist, gilt

$$\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{a}).$$

(iii') Wenn $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ eine gemeinsame endlich erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ haben, und σ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Aussage ist, gilt

$$\mathcal{M}_\mathcal{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_\mathcal{A} \vDash \sigma.$$

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\phi(\overline{a})$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Aussage. Nach (i) ist $\phi(\overline{x})$ äquivalent zu einer qf Formel $\phi'(\overline{x})$ modulo T. Dann $\mathcal{M}_\mathcal{A} \vDash \phi'(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi'(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{B} \vDash \phi'(\overline{a})$. Daher $\mathcal{M}_\mathcal{A} \vDash \phi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{B} \vDash \phi(\overline{a})$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (ii'): Nach Lemma 5.14 sind die Modelle von $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ genau $\mathcal{M}_\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{M} \vDash T$ und $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}$. Somit sagt (ii) genau, dass $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ vollständig ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iii'): Klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\phi(\overline{x})$ primitiv existentiell. Nach Lemma 5.12 genügt es zu zeigen, dass ϕ äquivalent modulo T zu einer qf Formel ist.

Sei $\overline{c}$ ein Tupel von neuen Konstanten mit $|\overline{c}| = |\overline{x}|$.
Sei $T_1 := T \cup \{\phi(\overline{c})\}$ und $T_2 := T \cup \{\neg\phi(\overline{c})\}$.
Wenn T_1 inkonsistent ist, gilt $T \vDash \forall \overline{x}.\, \neg\phi(\overline{x})$, und daher $\phi(\overline{x}) \leftrightarrow_T \bot$.
Wenn T_2 inkonsistent ist, gilt $T \vDash \forall \overline{x}.\, \phi(\overline{x})$, und daher $\phi(\overline{x}) \leftrightarrow_T \top$.
Nehmen wir also an, dass T_1 und T_2 konsistent sind.

Nehmen wir an, dass $\Sigma := \{\psi(\overline{c}) : \psi(\overline{x}) \text{ qf } \mathcal{L}\text{-Formel}\}$ T_1 nicht von T_2 trennt. Nach Lemma 4.2 gibt es $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \vDash T$ und $\overline{a}_i \in \mathcal{M}_i$ mit $\mathcal{M}_1 \vDash \phi(\overline{a}_1)$ und $\mathcal{M}_2 \vDash \neg\phi(\overline{a}_2)$, aber für alle qf $\psi(\overline{x})$ gilt $\mathcal{M}_1 \vDash \psi(\overline{a}_1) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \vDash \psi(\overline{a}_2)$.

Dann setzt sich die Abbildung $\overline{a}_1 \mapsto \overline{a}_2$ zu einem $\mathcal{L}$-Isomorphismus $\langle \overline{a}_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{\cong} \langle \overline{a}_2 \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}_2}$ fort (Nämlich $t^{\mathcal{M}_1}(\overline{a}_1) \mapsto t^{\mathcal{M}_2}(\overline{a}_2)$ für t ein $\mathcal{L}$-Term), der sich zu einem $\mathcal{L}$-Isomorphismus $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_1' \geq \langle \overline{a}_2 \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}_2}$ erweitern lässt (nach Lemma 2.2). Dann $\mathcal{M}_1' \vDash \phi(\overline{a}_2)$ und $\mathcal{M}_2 \vDash \neg\phi(\overline{a}_2)$. Das widerspricht (iii).

Also gibt es $\psi(\overline{c}) \in \Sigma$ sodass $T_1 \vDash \psi(\overline{c})$ und $T_2 \vDash \neg\psi(\overline{c})$, d.h. $\phi(\overline{x}) \to_T \psi(\overline{x})$ und $\neg\phi(\overline{x}) \to_T \neg\psi(\overline{x})$. Somit $\phi(\overline{x}) \leftrightarrow_T \psi(\overline{x})$.

□

Wir können jetzt Bemerkung 5.6 für beliebige Sprachen verallgemeinern:

Korollar 5.16. *Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie mit QE. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist vollständig.

(ii) Für alle $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ gilt $\langle \emptyset \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}} \cong \langle \emptyset \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{N}}$.

Beweis.

(i) ⇒ (ii): Die Abbildung $t^{\mathcal{M}} \mapsto t^{\mathcal{N}}$ für t ein $\mathcal{L}$-Term mit keine Variablen ist ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus.

(ii) ⇒ (i): Sei $\mathcal{M} \vDash T$ und $\mathcal{A} := \langle \emptyset \rangle_{\mathcal{L}}^{\mathcal{M}} \leq \mathcal{M}$. Sei $\mathcal{N} \vDash T$. Nach (ii) gibt es (nach Lemma 2.2) $\mathcal{N}' \cong \mathcal{N}$ mit $\mathcal{A} \leq \mathcal{N}'$. Nach Satz 5.15(ii) $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{N}'_{\mathcal{A}}$. Daher $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}' \cong \mathcal{N}$. Somit ist T vollständig.

□

5.4 Beispiele

5.4.1 T_∞

Sei T_∞ die $\mathcal{L}_\emptyset$-Theorie

$$T_\infty := \{\exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{i \neq j} x_i \not\doteq x_j : n \in \omega\}.$$

Proposition 5.17. *T_∞ ist vollständig und besitzt Quantorenelimination.*

Beweis. Vollständigkeit folgt aus Quantorenelimination, weil die Sprache keine Konstante hat.

Für QE zeigen wir Satz 5.15(iii').

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T_\infty$ und $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}, \mathcal{N}$ eine endliche gemeinsame Teilmenge.

Sei $\exists y.\, \psi(y)$ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{A})$-Aussage. Angenommen, dass $b \in \mathcal{M}$ existiert, sodass $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \vDash \psi(b)$. Wir müssen ein $b' \in \mathcal{N}$ finden, sodass $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \vDash \psi(b')$.

Falls $b \in \mathcal{A}$: Setze $b' := b$. Falls $b \notin \mathcal{A}$: Weil $\mathcal{N} \vDash T_\infty$, ist $\mathcal{N}$ unendlich; setze $b' \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{A}$.

Dann ist $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \cup \{b \mapsto b'\}$ eine Bijektion und demnach ein $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{A})$-Isomorphismus. Daher $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \vDash \psi(b')$. □

5.4.2 DLO

Sei $\mathcal{L}_< := \{<\}$ und sei DLO die $\mathcal{L}_<$-Theorie dichter linearer Orderungen ohne Endpunkten:

$$\begin{aligned}\mathrm{DLO} := \{\forall x, y, z.\, (&\neg x < x \\ &\wedge (x < y \vee x = y \vee y < x) \\ &\wedge ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \\ &\wedge (x < y \to \exists w.\, (x < w \wedge w < y)) \\ &\wedge \exists w.\, w < x \\ &\wedge \exists w.\, x < w)\}.\end{aligned}$$

Proposition 5.18. DLO *ist vollständig und besitzt Quantorenelimination.*
Insbesondere ist DLO *eine Axiomatisierung von* $(\mathbb{Q}; <)$. *Folglich ist* $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}; <))$ *entscheidbar.*

Beweis. Vollständigkeit folgt aus Quantorenelimination, weil die Sprache keine Konstante besitzt.

Entscheidbarkeit folgt aus Vollständigkeit, weil DLO eine rekursive Menge ist, und damit $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}; <)) = \{\sigma : \mathrm{DLO} \vDash \sigma\}$ und ihr Komplement $\{\sigma : \mathrm{DLO} \vDash \neg\sigma\}$ rekursiv aufzählbar sind, und daher $\mathrm{Th}((\mathbb{Q}; <))$ rekursiv ist.

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash \mathrm{DLO}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \leq \mathcal{M}, \mathcal{N}$ eine gemeinsame endliche Unterstruktur. Ohne Beschränkung gilt $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

¡—Let¿— $\exists y.\, \psi(y)$ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}_<(\mathcal{A})$-Aussage. Angenommen, dass $b \in \mathcal{M}$ existiert, sodass $\mathcal{M}_\mathcal{A} \vDash \psi(b)$. Wir finden ein $b' \in \mathcal{N}$ mit $\mathcal{N}_\mathcal{A} \vDash \psi(b')$.

Es gibt vier Fälle:

(i) $b \in A$: Setze $b' = b$.

(ii) $b < a_1$: Sei $b' \in \mathcal{N}$ sodass $b' < a_1$ (b' existiert, weil $\mathcal{N}$ keinen Endpunkt hat).

(iii) $b > a_n$: Sei $b' \in \mathcal{N}$ sodass $b' > a_n$ (b' existiert, weil $\mathcal{N}$ keinen Endpunkt hat).

(iv) $a_i < b < a_{i+1}$: Sei $b' \in \mathcal{N}$ sodass $a_i < b' < a_{i+1}$ (b' existiert, weil $\mathcal{N}$ dicht ist).

In allen Fällen ist $A \cup \{b\}$ zu $A \cup \{b'\}$ über A isomorph als angeordnete Mengen. Daher $\mathcal{N}_\mathcal{A} \vDash \psi(b')$. □

5.4.3 $(\mathbb{Z}; S)$

Sei $\mathcal{L}_S := \{S\}$, wobei S ein 1-stelliges Funktionszeichen ist.

Sei T_S die $\mathcal{L}_S$-Theorie von zyklenfreien Bijektionen

$$T_S := \{\forall x, y.\, ((S(x) = S(y) \to x = y) \wedge \exists z.\, S(z) = x)\} \cup \{\forall x.\, S^n(x) \neq x : n \geq 1\}$$

(wobei $S^{n+1}(x) := S(S^n(x))$; $S^1(x) := S(x)$).

$(\mathbb{Z}; S) \vDash T_S$ (wobei $S^\mathbb{Z}(n) := n + 1$).

Proposition 5.19. T_S *ist vollständig und besitzt Quantorenelimination.*
Insbesondere ist $(\mathbb{Z}; S)$ *entscheidbar und durch* T_S *axiomatisiert.*

Beweis. Vollständigkeit folgt aus Quantorenelimination, weil die Sprache keine Konstante besitzt.

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T_S$ mit einer endlich erzeugten gemeinsamen Unterstruktur $\mathcal{A}$.

Wir können annehmen, dass $S(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$: In der Tat ist $\bigcup_n (S^{\mathcal{M}})^{-n}(\mathcal{A})$ zu $\bigcup_n (S^{\mathcal{N}})^{-n}(\mathcal{A})$ über $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}_S$-isomorph, weil $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zyklenfrei sind.

Dann ist jede atomare $\mathcal{L}_S(\mathcal{A})$-Formel $\phi(x)$ modulo $T_S \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ zu $x \doteq a$ (für ein $a \in \mathcal{A}$) oder $\top$ oder $\bot$ äquivalent. In der Tat:

$$S^n(x) \doteq S^m(x) \leftrightarrow_{T_S} \begin{cases} \top & (n = m) \\ \bot & (n \neq m) \end{cases};$$

$$S^n(x) \doteq S^m(a) \leftrightarrow_{T_S \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})} x \doteq S^{m-n}(a) (\in \mathcal{A}).$$

Daher ist eine primitiv existentielle $\mathcal{L}_S(\mathcal{A})$-Aussage σ zu $\top$ oder $\bot$ oder

$$\exists y. \bigwedge_{i<k} y \doteq a_i \wedge \bigwedge_{i<l} y \not\doteq b_i$$

modulo $T_S \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ äquivalent. Weil $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ unendlich sind, gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \models \sigma$.

Die Behauptung folgt nach Satz 5.15(iii'). □

5.4.4 ACF

Sei $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Sei ACF die $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Theorie von algebraisch abgeschlossenen Körpern:

$$\mathrm{ACF} := \text{ [Körperaxiome] } \cup \{\forall z_0, \dots, z_n.\, \exists x.\, \sum_{i=0}^{n} z_i x^i \doteq 0 : n \geq 1\}.$$

Proposition 5.20. ACF *besitzt Quantorenelimination.*

Beweis. Sei $K_i \models \mathrm{ACF}$ und $R = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \leq K_1, K_2$ ein endlich erzeugter gemeinsamer Unterring.

Sei $\exists y. \psi(y)$ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}(R)$-Aussage. Angenommen, dass $b \in K_1$ existiert, sodass $K_1 \models \psi(b)$. Wir zeigen, dass $K_2 \models \exists y.\, \psi(y)$.

Sei F_i der Quotientenkörper in K_i von R. Dann lässt id_R sich zu einem Isomorphismus $f : F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ erweitern ($F_1 \ni \frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s} \in F_2$).

Nun sei G_i der algebraische Abschluss von F_i in K_i, d.h. die Menge aller Lösungen von Polynomgleichungen mit Koeffizienten in F_i.

Weil der algebraisch Abschluss von F_i bis auf F_i-Isomorphie endeutig bestimmt ist, lässt f sich zu einem Isomorphismus $g : G_1 \xrightarrow{\cong} G_2$ erweitern.

Falls $b \in G_1$, gilt $K_2 \models \psi(g(b))$.

Sonst: b ist transzendent über G_1. Dann ist $G_1(b)$ isomorph über G_1 zum rationalen Funktionkörper $G_1(X)$. Sei K_2' eine echte elementare Erweiterung von K_2. Dann gibt es $b' \in K_2' \setminus G_2$. Dann ist $G_2(b')$ wieder isomorph über G_2 zum rationalen Funktionkörper $G_2(X)$. Deshalb lässt g sich zu einem Isomorphismus $h : G_1(b) \to G_2(b')$ mit $h(b) = b'$ erweitern. Deswegen folgt $K_2' \models \psi(b')$ und deshalb $K_2' \models \exists y.\, \psi(y)$. Daher folgt schließlich $K_2 \models \exists y.\, \psi(y)$. □

Für $p \in \mathbb{N}$ prim, sei $\mathrm{ACF}_p := \mathrm{ACF} \cup \{\bar{p} \doteq 0\}$, wobei $\bar{n}$ der Term $1+1+\ldots+1$ (n Mal) ist.

Sei $\mathrm{ACF}_0 := \mathrm{ACF} \cup \{\bar{n} \not\doteq 0 : n \geq 1\}$.

Theorem 5.21. *Die Vervollständigungen von* ACF *sind* ACF_p *für p prim oder 0.*

Beweis. Die Charakteristik eines Körpers ist prim oder 0. Für K ein Körper mit Charakteristik p ist

$$\langle\emptyset\rangle^K_{\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}} = \begin{cases} \mathbb{F}_p & p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0 \end{cases}.$$

Deswegen impliziert Quantorenelimination nach Korollar 5.16 Vollständigkeit von jedem ACF_p. □

Satz 5.22 (Ax)**.** *Jede injektive Polynomabbildung* $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *(d.h.* $F(\overline{a}) = (F_1(\overline{a}), \ldots, F_n(\overline{a})$*, wobei* $F_i \in \mathbb{C}[\overline{X}]$*) ist surjektiv.*

Beweis.

Behauptung 5.23. *Sei p eine Primzahl. Jede injektive Polynomabbildung* $F : (\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}})^n \to (\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}})^n$ *ist surjektiv.*

Beweis. Wir haben: $\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}} = \bigcup_k \mathbb{F}_{p^k}$.

Sei k_0,sodass die Koeffizienten von F in $\mathbb{F}_{p^{k_0}}$ sind.

Sei $k \geq k_0$. Dann $F(\mathbb{F}^n_{p^k}) \subseteq \mathbb{F}^n_{p^k}$. Nach Injektivität und dem Schubfachprinzip gilt $F(\mathbb{F}^n_{p^k}) = \mathbb{F}^n_{p^k}$.

Daher $F((\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}})^n) = (\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}})^n$. □

Sei $n, d \in \omega$. Sei $\sigma_{n,d}$ eine $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$-Aussage, die ausdrückt, dass jede injektive Polynomabbildung $F : K^n \to K^n$, die von Polynome mit Grad $\leq d$ besteht, surjektiv ist:

$$\sigma_{n,d} := \forall z_{1,0}, \ldots, z_{n,d}.(\forall \overline{x}, \overline{y}.((\bigwedge_i \sum_j z_{i,j} x_i^j \doteq \sum_j z_{i,j} y_i^j) \to \bigwedge_i x_i \doteq y_i) \to \forall \overline{y}.\exists \overline{x}. \bigwedge_i \sum_j z_{i,j} x_i^j \doteq y_i).$$

Angenommen, dass $\mathbb{C} \not\models \sigma_{n,d}$. Nach Vollständigkeit von ACF_0 gilt $\mathrm{ACF}_0 \models \neg\sigma_{n,d}$. Nach Kompaktheit gibt es $m \in \omega$, sodass

$$\mathrm{ACF} \models \bigwedge_{0<i<m} \bar{i} \not\doteq 0 \to \neg\sigma_{n,d}.$$

Wenn $p > m$ prim ist, gilt dann $\mathrm{ACF}_p \models \neg\sigma_{n,d}$. Das widerspricht der Behauptung. □

5.4.5 Presburger Arithmetik

Beispiel 5.24. (ohne Beweis) In $(\mathbb{Z}; +, <)$ sind $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$ existentiell definierbar aber nicht qf definierbar. Jedoch hat $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, <, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, \ldots)$ QE.

6 Elementare Erweiterungen

Satz 6.1 (Tarski-Test)**.** *Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und A eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist die Grundmenge einer elementaren Unterstruktur;

(ii) für jede $\mathcal{L}(A)$-Formel in einer freien Variable $\phi(x)$ gilt: wenn $\mathcal{M} \models \exists x.\phi(x)$, gilt $\mathcal{M} \models \phi(a)$ für ein $a \in A$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mathcal{A}$ die elementare Unterstruktur, die Grundmenge A hat. Falls $\mathcal{M} \models \exists x.\phi(x)$, $\mathcal{A} \models \exists x.\phi(x)$ durch Elementarität; wähle ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \phi(a)$; dann $\mathcal{M} \models \phi(a)$ durch Elementarität.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus (ii) mit $\phi(x) := x \doteq f(\overline{a})$ folgt, dass A geschlossen unter ($\geq$ 0-st) Funktionen ist. Daher ist A die Grundmenge eine Unterstruktur $\mathcal{A}$.

Wir zeigen durch Induktion über Formelkomplexität, dass für jede $\mathcal{L}(A)$-Aussage σ

$$\mathcal{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \sigma. \tag{1}$$

(1) gilt für atomare σ, weil $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur ist, und wenn es für σ und σ' gilt, gilt es offensichtlich auch für $\neg\sigma$ und $(\sigma \wedge \sigma')$.

Nun nehmen wir an, dass $\sigma = \exists x.\, \phi(x)$, und (1) für $\phi(a)$ für jedes $a \in A$ gilt.

Wenn $\mathcal{A} \models \sigma$, gilt $\mathcal{A} \models \phi(a)$ für ein $a \in A$, somit $\mathcal{M} \models \phi(a)$ durch die Induktionsvoraussetzung, daher $\mathcal{M} \models \sigma$. Nehmen wir umgekehrt an, dass $\mathcal{M} \models \sigma$. Dann $\mathcal{M} \models \phi(b)$ für ein $b \in \mathcal{M}$. Durch (ii) $\mathcal{M} \models \phi(a)$ für ein $a \in A$. Dann $\mathcal{A} \models \phi(a)$ durch die Induktionsvoraussetzung. Daher $\mathcal{A} \models \sigma$.

$\square$

Definition 6.2. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T besitzt **interne Skolemfunktionen**, wenn es für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x, \overline{y})$ ein Funktionszeichen $f_{\phi(x,\overline{y})} \in \mathcal{L}$ gibt, sodass

$$T \models \forall \overline{y}.\, (\exists x.\, \phi(x, \overline{y}) \rightarrow \phi(f_{\phi(x,\overline{y})}(\overline{y}), \overline{y})).$$

Lemma 6.3. *Wenn T eine $\mathcal{L}$-Theorie mit interne Skolemfunktionen ist, sind Unterstrukturen von Modelle elementar: Wenn $\mathcal{N} \leq \mathcal{M} \models T$, gilt $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$.*

Beweis. Sei $\phi(x, \overline{a})$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{N})$-Formel, und nehmen wir an, dass $\mathcal{M} \models \exists x.\phi(x, \overline{a})$. Dann $f_{\phi(x,\overline{y})}(\overline{a}) \in \mathcal{N}$, weil $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$, und $\mathcal{M} \models \phi(f_{\phi(x,\overline{y})}(\overline{a}), \overline{a})$. Damit gilt nach Satz 6.1 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$. $\square$

Lemma 6.4. *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie. Dann T hat eine* **Skolemexpansion** *$T^* \supseteq T$, d.h. eine Theorie in einer Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ mit $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$, sodass T^* interne Skolemfunktionen hat, und jedes Modell von T expandiert zu einem Modell von T^*.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i \cup \{f_{\phi(x,\overline{y})} : \phi(x, \overline{y}) \text{ eine } \mathcal{L}_i\text{-Formel}\}$ und $\mathcal{L}^* := \bigcup_i L_i$.

Sei $T^* := T \cup \{\forall \overline{y}.\, (\exists x.\, \phi(x, \overline{y}) \rightarrow \phi(f_{\phi(x,\overline{y})}(\overline{y}), \overline{y})) \mid \phi(x, \overline{y}) \text{ eine } \mathcal{L}^*\text{-Formel}\}$.

Wenn $\mathcal{M} \models T$, können wir nach dem Auswahlaxiom rekursiv die $f_{\phi(x,\overline{y})}$ definieren, um ein Modell von T^* zu erreichen. $\square$

Satz 6.5 (Löwenheim-Skolem). *Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur.*

(i) "Abwärts": Sei $A \subseteq \mathcal{M}$ eine Teilmenge mit $|A| \geq |\mathcal{L}| + \aleph_0$, Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$, sodass $A \subseteq \mathcal{N}$ und $|\mathcal{N}| = |A|$.

(ii) "Aufwärts": Für jede Kardinalzahl $\kappa \geq |\mathcal{L}| + |\mathcal{M}|$ gibt es eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ mit $|\mathcal{N}| = \kappa$.

Insbesondere gibt es für jedes $\kappa \geq |\mathcal{L}| + \aleph_0$ ein Modell $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ mit $|\mathcal{N}| = \kappa$.

Beweis. (i) Zuerst nehmen wir an, dass $T := \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ interne Skolemfunktionen hat.

Sei $\mathcal{N} := \langle A \rangle^{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}^*}$. Nach Lemma 2.1 $|\mathcal{N}| = |A|$. Nach Lemma 6.3 $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$.

Nun zu dem allgemeinen Fall: Seien $\mathcal{L}^*$ und T^* wie in Lemma 6.4 und sei $\mathcal{M}^* \vDash T^*$ eine Expansion von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{L}^*$. Weil $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$, gilt $|A| \geq |\mathcal{L}^*| + \aleph_0$. Dann erhalten wir $A \subseteq \mathcal{N}^* \preceq \mathcal{M}^*$ mit $|\mathcal{N}^*| = |A|$. Dann ist $\mathcal{N} := \mathcal{N}^* {\restriction}_{\mathcal{L}}$ wie gewünscht.

(ii) Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L}(\mathcal{M}) \dot\cup \{c_i : i \in \kappa\}$, wobei c_i neue Konstanten sind, und $T' := \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{M}}) \cup \{c_i \not\doteq c_j : i \neq j \in \kappa\}$. Dann T' ist konsistent, weil $\mathcal{M}$ unendlich ist. Sei $\mathcal{M}' \vDash T'$ mit $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}'$ und sei $A := \{c_i^{\mathcal{M}'} : i \in \kappa\} \subseteq \mathcal{M}'$. Dann nach (i), gibt es $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}'$ mit $|\mathcal{N}| = |A| = \kappa$. Nun $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$, weil $\mathcal{N} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{M}})$. □

Korollar 6.6 ("Das Skolem-Paradoxon"). *Wenn* ZFC *konsistent ist, hat es ein abzählbares Modell. Dies ist kein Paradoxon!*

Korollar 6.7. *Kein unendliche Struktur ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch ihre Theorie.*

Bemerkung 6.8. Im Gegensatz dazu *ist* jede *endliche* Struktur durch ihre Theorie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung 6.9. $(\mathbb{R}; +, \cdot, <)$ *ist* der eindeutig bestimmte vollständige geordnete Körper; aber "vollständig" (jede beschränkte Teilmenge hat ein Supremum) ist nicht in der Logik erster Stufe ausdrückbar.

Definition 6.10. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt **κ-kategorisch**, wenn T ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Modell der Mächtigkeit κ besitzt.

Satz 6.11 (Cantor). DLO *ist $\aleph_0$-kategorisch.*

Beweis. ("Hin-und-her-Argumentation")

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash$ DLO mit $|\mathcal{M}| = \aleph_0 = |\mathcal{N}|$. Seien $\mathcal{M} = (m_i)_{i \in \omega}$ und $\mathcal{N} = (n_i)_{i \in \omega}$. Wir bauen rekursiv eine Kette von partiellen Isomorphismen $\theta_i : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$, sodass

$$|\mathrm{dom}\, \theta_i| < \aleph_0 \text{ und für alle } j < i \text{ gilt } m_j \in \mathrm{dom}\, \theta_i \text{ und } n_j \in \mathrm{im}\, \theta_i. \qquad (*)$$

Sei $\theta_0 := \emptyset$.

Angenommen, dass θ_i, das (*) erfüllt, konstruiert ist.

Genau wie im Beweis von QE für DLO lässt θ_i sich zu $\theta_i' : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ mit $m_i \in \mathrm{dom}\, {\theta_i}'$ erweitern.

Ähnlich lässt $(\theta_i')^{-1} : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{M}$ sich zu $\theta_i'' : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{M}$ mit $n_i \in \operatorname{dom}\theta_i''$ erweitern.
Dann $\theta_{i+1} := (\theta_i'')^{-1} : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ erfüllt (*).

Dann ist $\theta := \bigcup_i \theta_i : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}$ ein Isomorphismus. □

Satz 6.12 (Vaughts Kriterium)**.** *Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, die kein endliches Modell besitzt und κ-kategorisch ist, wobei $\kappa \geq |\mathcal{L}| + \aleph_0$. Dann ist T vollständig.*

Beweis. Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$. Beide $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind unendlich. Nach Satz 6.5 gibt es $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und $\mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}$ mit $|\mathcal{M}'| = \kappa = |\mathcal{N}'|$. Nach κ-Kategorizität $\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}'$. Daher $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. □

Notation 6.13. Für T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie setzen wir

$$|T| := |\mathcal{L}| + \aleph_0.$$

Das ist die Mächtigkeit der Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen ist.

7 Typen

Definition 7.1. Sei $n \in \omega$ und sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Tupel von verschiedenen Variablen.

- Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Der **Typ** (in Variablen $\overline{x}$) eines Tupels $\overline{b} \in \mathcal{M}^n$ in $\mathcal{M}$ ist
$$\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}) := \{\phi(\overline{x}) : \mathcal{M} \vDash \phi(\overline{b});\ \phi(\overline{x}) \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}\}.$$
- Ein **Typ** ist der Typ eines Tupels in einer Struktur.
- Ein **partieller Typ** ist eine Teilmenge eines Typs.
- Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie. Die Menge von n**-Typen in** T ist
$$S_n(T) := \{\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}) : \mathcal{M} \vDash T;\ \overline{b} \in \mathcal{M}^n\}.$$
(Eigentlich sollte dies als $S_{\overline{x}}(T)$ geschrieben werden, weil es von der Wahl von den Variablen $\overline{x}$ und nicht nur von n abhängt. Aber "S_n" ist traditionell.)
- Sei A eine Teilmenge einer Struktur $\mathcal{M}$ und $\overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Der Typ von $\overline{b}$ **über** A ist
$$\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A) := \operatorname{tp}^{\mathcal{M}_A}(\overline{b}) \in S_n(\operatorname{Th}(\mathcal{M}_A)).$$
- Sei $S_n^{\mathcal{M}}(A) := S_n(\operatorname{Th}(\mathcal{M}_A))$.
- Wir schreiben $S(T)$ für die Menge aller Typen (in beliebigen freien Variablen) in T, und $S^{\mathcal{M}}(A)$ für die Menge aller Typen über $A \subseteq \mathcal{M}$.

Lemma 7.2. *Eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln $\Phi(\overline{x})$ ist ein partieller Typ genau dann, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h.: Für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, sodass $\mathcal{M} \vDash \exists \overline{x}. \bigwedge_{\psi \in \Phi_0} \psi(\overline{x})$.*

Ein partieller Typ $\Phi(\overline{x})$ ist ein Typ genau dann, wenn für jede $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\overline{x})$ entweder $\psi(\overline{x}) \in \Phi(\overline{x})$ oder $\neg\psi(\overline{x}) \in \Phi(\overline{x})$ gilt.

Insbesondere sind Typen in T genau die maximalen konsistenten *(= endlich erfüllbaren in Modelle von T) Mengen von Formeln in einem bestimmten Tupel von Variablen.*

Beweis. Kompaktheit. □

Definition 7.3. $S_n(T)$ ist ein topologischer Raum mit Basis offener Mengen $\{[\phi] : \phi(\overline{x}) \text{ an } \mathcal{L}\text{-formula}\}$, wobei $[\phi] := \{p \in S_n(T) : \phi \in p\} \subseteq S_n(T)$.

Fakt 7.4. *$S_n(T)$ ist ein* Stone-Raum*, das heißt, das es kompakt Hausdorff und total unzusammenhängend ist.*

Beweis. ÜA 4. □

Beispiel 7.5 (Typen in DLO). DLO besitzt QE. Daher, wenn $\mathcal{M} \vDash \mathrm{DLO}$ und $\overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, ist $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A)$ durch die basic $\mathcal{L}_<(A)$-Formeln, die $\overline{b}$ erfüllt, bestimmt.

- $S_1(\mathrm{DLO})$: Die einzige konsistent basic Formel in einer freien Variable x ist $x = x$. Daher $|S_1(\mathrm{DLO})| = 1$.
- $S_2(\mathrm{DLO})$ besteht aus die drei Typen, die sind (modulo DLO) jeweils durch $x < y$, $x = y$, und $y < x$ bestimmt
- $|S_n(\mathrm{DLO})| < \aleph_0$.
- $S_1^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})$ besteht aus den Typen bestimmt durch
  - $x = n$ (ein $n \in \mathbb{Z}$);
  - $n < x < n + 1$ (ein $n \in \mathbb{Z}$);
  - $\{x < n : n \in \mathbb{Z}\}$;
  - $\{x > n : n \in \mathbb{Z}\}$.
- Allgemeiner betrachten wir $p(x) = S_1(A)$, wobei $A \subseteq \mathcal{M} \vDash \mathrm{DLO}$.

  Wenn $x = a \in p(x)$ für ein $a \in A$, bestimmt $x = a$ den Typ p.

  Sonst seien $L := \{a \in A : a < x \in p\}$ und $R := \{a \in A : a > x \in p\}$. Dann ist (L, R) ein **Schnitt** in A, d.h., $L \dot{\cup} R = A$ und für alle $l \in L$ und $r \in R$ gilt $l < r$. Dann ist $p(x)$ durch $\{l < x : l \in L\} \cup \{x < r : r \in R\}$ bestimmt.

  Wenn umgekehrt (L, R) ein Schnitt ist, ist $\{l < x : l \in L\} \cup \{x < r : r \in R\}$ endlich erfüllbar und bestimmt daher einen Typ in $S_1(A)$.
- Z.B.: $S_1^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ ist in Bijektion mit $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (Aber die Topologie ist gewiss nicht die Euklidische Topologie!).

Definition 7.6. Für $\Phi(\overline{x})$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln und $\overline{c}$ ein $|\overline{x}|$-Tupel von Konstanten

$$\Phi(\overline{c}) := \{\phi(\overline{c}) : \phi(\overline{x}) \in \Phi(\overline{x})\}.$$

Wenn $\overline{y}$ ein $|\overline{x}|$-Tupel von Variablen ist, definieren wir ähnlich $\Phi(\overline{y})$.

Bemerkung 7.7. Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie.

- $S_0(T)$ besteht aus den Vervollständigungen von T.
- Die Abbildung $S_n(T) \to S_0(T')$; $p(\overline{x}) \mapsto p(\overline{c})$ ist ein Homöomorphismus, wobei $\overline{c}$ ein n-Tupel von neuen Konstanten ist und T' die $\mathcal{L}(\overline{c})$-Theorie, die aus den gleichen Aussagen wie T besteht, ist.

Bemerkung 7.8. Sei $A \subseteq \mathcal{M}$ eine Teilmenge einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$.

Wenn $\mathcal{N}$ eine andere $\mathcal{L}$-Struktur, die A enthalt, ist und $\mathcal{N}_A \equiv \mathcal{M}_A$ (Z.B. wenn $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$), gilt $S_n^{\mathcal{N}}(A) = S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

Wir schreiben oft $S_n(A)$ für $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

Definition 7.9. Sei $\Phi(\overline{x})$ eine Menge von Formeln.

- Wenn $\overline{a} \in \mathcal{M}$, bedeutet
$$\overline{a} \vDash \Phi,$$
dass
$$\mathcal{M}_{\overline{a}} \vDash \Phi(\overline{a}).$$
Dann heißt $\overline{a}$ eine **Realisierung** vom partiellen Typ Φ.
- Wir schreiben
$$\Phi(\overline{x}) \vdash_T \Phi'(\overline{x}),$$
falls
$$\Phi(\overline{c}) \vdash_T \Phi'(\overline{c}),$$
wobei $\overline{c}$ ein $|\overline{x}|$-Tupel von neuen Variablen ist. Dazu äquivalent, für jedes Modell $\mathcal{M} \vDash T$ und $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|}$
$$\overline{a} \vDash \Phi(\overline{x}) \ \Rightarrow \ \overline{a} \vDash \Phi'(\overline{x}).$$
Wir schreiben z.B. $\phi \vdash_T \Phi$ statt $\{\phi\} \vdash_T \Phi$.

Definition 7.10. $\mathcal{M} \vDash T$ **realisiert** eine Formelmenge Φ in T, wenn ein $\overline{b} \in \mathcal{M}^n$ eine Realisierung von Φ ist.

Wenn $\mathcal{M}$ realisiert Φ nicht, **vermeidet** $\mathcal{M}$ die Formelmenge Φ.

Definition 7.11. Ein Typ $p(\overline{x}) \in S_n(T)$ ist **isoliert**, wenn es $\phi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ gibt, sodass $\phi(\overline{x}) \vdash_T p(\overline{x})$. Dann sagen wir, dass ϕ den Typ p **isoliert**.

Lemma 7.12. *Sei T eine vollständige Theorie sein. Seien $p \in S_n(T)$ isoliert und $\mathcal{M} \vDash T$. Dann realisiert $\mathcal{M}$ den Typ p.*

Beweis. Sei $\phi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ mit $\phi(\overline{x}) \vdash_T p(\overline{x})$. Weil p endlich erfüllbar ist (Nach Lemma 7.2) und T vollständig ist, gilt $T \vDash \exists \overline{x}.\ \phi(\overline{x})$. Sei somit $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|}$ mit $\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{b})$. Dann $\overline{b} \vDash p$. □

Example 7.13. Sei $K \vDash \mathrm{ACF}$ und $F \subseteq K$ einen Unterkörper. Sei $p(x) \in S_1(F)$. Weil ACF QE besitzt, ist p durch die impliziert durch p Polynomgleichungen über A bestimmt, d.h. durch
$$I_p := \{f(X) \in F[X] : f(x) \doteq 0 \in p\}.$$

Dies ist ein Ideal: $I_p \trianglelefteq F[X]$. Außerdem ist es ein Primideal, d.h.: $f \cdot g \in I_p \Rightarrow (f \in I_p$ oder $g \in I_p)$. In der Tat: sei eine Realisierung $a \in K' \succeq K$; wenn $(f \cdot g)(a) = 0$, gilt $f(a) \cdot g(a) = 0$ und somit $f(a) = 0$ oder $g(a) = 0$ (weil K' eine Integrätsbereich ist).

Nun weil $F[X]$ ein Hauptidealring ist, gilt $I_p = m_p \cdot F[X]$ für ein Primelement $m_p \in F[X]$. Wenn $m_p = 0$, ist p der Typ eines transzendenten Elements über F. Dann könnte p nicht in K realisiert werden (K könnte F^{alg} sein). Sonst ist p ein *algebraischer* Typ und ist durch $m_p(x) \doteq 0$ isoliert und ist in jeder algebraischen abgeschlossenen Körpererweiterung von F realisiert.

Betrachte nun $p \in S_n(F)$, wobei $n \geq 1$. Wie vorher ist

$$I_p := \{f(\overline{X}) \in F[\overline{X}] : f(\overline{x}) \doteq 0 \in p\}$$

ein Primideal in $F[\overline{X}]$.

Umgekehrt: Wenn $I \trianglelefteq F[\overline{X}]$ ein Primideal ist, ist $R := F[\overline{X}]/I$ eine Integrätsbereich. Sei $K' \supseteq F$ ein algebraischer Abschluss des Quotientenkörpers von R und sei $a_i := X_i/I \in K'$. Sei $p := \mathrm{tp}^{K'}(\overline{a}/F)$. Dann $I_p = I$.

Somit ist $p \mapsto I_p$ eine Bijektion $S_n(F) \to \mathrm{Spec}(F[\overline{X}])$, wobei $\mathrm{Spec}(F[\overline{X}])$ die Menge alles Primideals von $F[\overline{X}]$ ist. (Diese Abbildung ist stetig, wenn das Spektrum $\mathrm{Spec}(F[\overline{X}])$ seine gewöhnte Zariskitopologie hat, aber sie ist kein Homöomorphismus.)

Wir können auch denken an dies in Bezug auf naive algebraische Geometrie. Wenn F ein Unterkörper eines algebraischen abgeschlossenen Körpers K ist, ist eine *abgeschlossene algebraische Teilmenge* von K^n über F die gemeinsame Nullstelle $V = V(I) \subseteq K^n$ eines Ideals $I \trianglelefteq F[\overline{X}]$. V heißt *irreduzible*, wenn es nicht die Vereinigung zweier echter abgeschlossener algebraischer Teilmengen über F ist; dazu äquivalent, wenn I ein Primideal ist. Ein Punkt $\overline{a} \in V$ heißt *generisch* (über F), wenn es in kein echten abgeschlossenen algebraischen Teilmenge ist. Dann gilt $\mathrm{tp}(\overline{a}/F) = p_{I_p}$. Umgekehrt: jeden Typ $p \in S_n(F)$ ist von diese Form für ein $\overline{a} \in K^n$ für ein K (z.B. durch Betrachtung von $F[\overline{X}]/I_p$ wie vorher). Mit anderen Worten: Die Typen in ACF sind genau die Typen generischer Elemente irreduzibler abgeschlossener algebraischer Teilmengen.

Schließlich: Betrachte eine beliebige Teilmenge $A \subseteq K$. Sei $F \leq K$ der Unterkörper, den A erzeugt. Dann bestimmt ein Typ über A einen Typ über F. D.h.: Die Einschränkung-Abbildung $S_n(F) \to S_n(A)$ ist eine Bijektion.

7.1 Saturiertheit

Lemma 7.14 ("Gemeinsame Konsistenz für Konstanten")**.** *Sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie. Für $i \in I$ sei C_i eine Menge von Konstanten ist mit $C_i \cap C_j = \emptyset = C_i \cap \mathcal{L}$ für $i \neq j$. Sei $T_i \supseteq T$ eine konsistent $\mathcal{L} \cup C_i$-Theorie. Dann ist $\bigcup_{i \in I} T_i$ konsistent.*

Bemerkung 7.15. In Fakt gilt dies, wenn wir auch neue Relationszeichen und/oder Funktionszeichen hinzufugen. Dies ist "Robinson's Joint Consistency Theorem" (Chang&Keisler enthält einen Beweis).

Beweis. Wenn $\bigcup_{i \in I} T_i$ inkonsistent ist, ist nach Kompaktheit $T \cup \{\phi_i(\overline{c}_i) : i \in I_0\}$ inkonsistent, wobei $I_0 \subseteq I$ endlich ist und $T_i \vDash \phi_i(\overline{c}_i)$ und $\overline{c}_i \in C_i^{<\omega}$. OBdA $I_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dann $T \vDash \forall \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n.\, \neg \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi_i(\overline{x}_i)$ mit $\overline{x}_i$ disjunkt Tupeln.

Dann $T \models \forall \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n.\ \bigvee_{1\leq i\leq n} \neg\phi_i(\overline{x}_i)$.

Dann $T \models \bigvee_{1\leq i\leq n} \forall \overline{x}_i.\ \neg\phi_i(\overline{x}_i)$. Damit ist $T \cup \{\phi_i(\overline{c}_i)\}$ inkonsistent für eines i. Dies widerspricht die Konsistenz von T_i. $\square$

Lemma 7.16. *Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subseteq \mathcal{M}$. Dann gibt es $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$, das jeden Typ $p \in S(A)$ realisiert.*

Beweis. Für jede $n \geq 1$ und jeden n-Typ $p \in S(A)$ sei $\overline{c}_p$ ein Tupel von neuen Konstanten mit $|\overline{c}_p| = n$.

Wir müssen zeigen, dass $T' := \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{M}}) \cup \bigcup_{p\in S(A)} p(\overline{c}_p)$ konsistent ist.

Nach der Definition von $S(A)$ ist jede $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A) \cup p(\overline{c}_p)$ konsistent. Auch ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{M}}) \supseteq \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ konsistent. Somit ist T' konsistent nach Lemma 7.14. $\square$

Definition 7.17. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ heißt **κ-saturiert**, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa$ jedes $p \in S_1(A)$ in $\mathcal{M}$ realisiert ist.

$\mathcal{M}$ heißt **saturiert**, wenn es $|\mathcal{M}|$-saturiert ist.

Beispiel 7.18. $(\mathbb{Q}; <)$ ist $\aleph_0$-saturiert.

$\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} \models \mathrm{ACF}$ ist nicht $\aleph_0$-saturiert (Da vermeidet es den transzendente Typ in $S_1(\emptyset)$).

Lemma 7.19. *Wenn $\mathcal{M}$ ist κ-saturiert, ist für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa$ und jedes $n \geq 1$ jedes $p \in S_n(A)$ in $\mathcal{M}$ realisiert.*

Beweis. Durch Induction über n.

Sei $p(x_1, \ldots, x_n, y) \in S_{n+1}(A)$. Setze $q(x_1, \ldots, x_n) := \{\phi(x_1, \ldots, x_n) : \phi \in p\} \in S_n(A)$. Aus der Induktionsvoraussetzung ist q in $\mathcal{M}$ realisiert. Sei $\overline{a} \in \mathcal{M}^n$ mit $\overline{a} \models q$.

Nun ist $p(\overline{a}, y) = \{\phi(\overline{a}, y) : \phi \in p\} \in S_1^{\mathcal{M}}(A \cup \{a_1, \ldots, a_n\})$; in der Tat: Sei $\Phi_0(\overline{x}, y) \subseteq_{\mathrm{end}} p(\overline{x}, y)$ eine endliche Teilmenge. Weil $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a/A) = q(\overline{x}) \ni \exists y.\ \bigwedge_{\phi\in\Phi_0} \phi(\overline{x}, y)$, gilt $\mathcal{M} \models \exists y.\ \bigwedge_{\phi\in\Phi_0} \phi(\overline{a}, y)$.

Daher (Weil $|A| + n < \kappa$) gibt es $b \in \mathcal{M}$ mit $b \models p(\overline{a}, y)$ und somit $(\overline{a}, b) \models p(\overline{x}, y)$. $\square$

Lemma 7.20. *Seien $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ partiell elementar und $A \subseteq \mathrm{dom}\,\theta$ und $p(\overline{x}) \in S^{\mathcal{M}}(A)$.*

(i) Die **Konjugierte** *von p durch θ*

$$p^{\theta}(\overline{x}) := \{\phi(\overline{x}, \theta(\overline{a})) : \phi(\overline{x}, \overline{a}) \in p(\overline{x});\ \phi \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}\}$$

ist ein Typ $p^{\theta} \in S^{\mathcal{N}}(\theta(A))$.

(ii) Für $b \in \mathcal{M}$ eine Erweiterung θ' von θ mit $\mathrm{dom}\,\theta' = \mathrm{dom}\,\theta \cup \{b\}$ ist partiell elementar genau dann, wenn $\theta'(b) \models \mathrm{tp}(b/\mathrm{dom}\,\theta)^{\theta}$.

Beweis. (i) Für eine endliche Teilmenge $\Phi_0(\overline{x}) \subseteq_{\mathrm{end}} p(\overline{x})$, schreibe $\bigwedge \Phi_0$ als $\psi(\overline{x}, \overline{a})$, wobei ψ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $\overline{a} \in A^{<\omega}$. Dann $\mathcal{M} \models \exists \overline{x}.\ \psi(\overline{x}, \overline{a})$. Nach Elementarität $\mathcal{N} \models \exists \overline{x}.\ \psi(\overline{x}, \theta(\overline{a}))$.

(ii) Sofort.

$\square$

Lemma 7.21. *Wenn $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ und $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}| \geq \aleph_0$ und beide $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ saturiert sind, gilt $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Beweis. Hin-und-her.

Seien $\mathcal{M} = (m_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ und $\mathcal{N} = (n_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$. Wir bauen rekursiv eine Kette von partiellen elementaren Abbildungen $\theta_\alpha : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ für $\alpha \in \lambda$, sodass

$$|\operatorname{dom}\theta_\alpha| \leq 2 \cdot |\alpha| \text{ und für alle } \beta < \alpha \text{ gilt } m_\beta \in \operatorname{dom}\theta_\alpha \text{ und } n_\beta \in \operatorname{im}\theta_\alpha. \quad (*)$$

Sei $\theta_0 := \emptyset$. Für η eine Limeszahl sei $\theta_\eta := \bigcup_{\alpha<\eta}\theta_\alpha$. Wir haben $|\operatorname{dom}\theta_\eta| \leq |\eta| = 2 \cdot |\eta|$.

Angenommen, dass θ_α, das (*) erfüllt, konstruiert ist.

Nach Saturiertheit ist $\operatorname{tp}(m_\alpha/\operatorname{dom}\theta_\alpha)^{\theta_\alpha} \in S_1(\operatorname{im}\theta_\alpha)$ in $\mathcal{N}$ realisiert.

Daher lässt θ_α sich zu $\theta'_\alpha : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ mit $m_\alpha \in \operatorname{dom}{\theta_\alpha}'$ erweitern.
Symmetrisch lässt $(\theta'_\alpha)^{-1} : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{M}$ sich zu $\theta''_\alpha : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{M}$ mit $n_\alpha \in \operatorname{dom}{\theta_\alpha}''$ erweitern.
Dann $\theta_{\alpha+1} := (\theta''_\alpha)^{-1} : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ erfüllt (*).

Dann ist $\theta := \bigcup_\alpha \theta_\alpha : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}$ ein Isomorphismus. □

Definition 7.22. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist κ-universell, wenn jedes Modell $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ mit $|\mathcal{N}| < \kappa$ elementar in $\mathcal{M}$ einbetten lässt.

Lemma 7.23. *Sei $\mathcal{M}$ eine κ-saturierte $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist $\mathcal{M}$ κ^+-universell.*

Beweis. Sei $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ mit $\lambda := |\mathcal{N}| < \kappa^+$. Sei $\mathcal{N} = \{a_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Wir konstruieren eine Kette von partiellen elementaren Abbildungen $\theta_\alpha : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{M}$ mit $\operatorname{dom}\theta_\alpha = A_\alpha := \{a_\beta : \beta < \alpha\}$.

Setze $\theta_0 := \emptyset$. Für η eine Limeszahl setze $\theta_\eta := \bigcup_{\alpha<\eta}\theta_\alpha$.

Weil $|A_\alpha| = |\alpha| < \lambda \leq \kappa$, ist nach κ-Saturiertheit $\operatorname{tp}(a_\alpha/A_\alpha)^{\theta_\alpha}$ in $\mathcal{M}$ realisiert. Sei $\theta_{\alpha+1}(a_\alpha)$ eine Realisierung. □

8 Abzählbare Modelle abzählbarer Theorien

8.1 Abzählbare saturierte Modelle

Lemma 8.1 (Tarskis Ketten-Lemma)**.** *Seien $(I;<)$ eine lineare Ordnung und $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine elementare Kette (D.h. $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ für $i < j$) Dann $\mathcal{M}_i \preceq \bigcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$ für alle i.*

Beweis. ÜA 1.1(b). □

Definition 8.2. Eine Theorie T heißt **schmal**, wenn $|S_n(T)| \leq \aleph_0$ für alle $n \in \omega$.

Beispiel 8.3. $(\mathbb{Q};<)$ is small. $(\mathbb{Q};<)_\mathbb{Q}$ is not small.

Satz 8.4. *Sei T eine abzählbare (D.h. $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$) vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendliche Modelle.*

Dann besitzt T ein abzählbares saturiertes Modell genau dann, wenn T schmal ist.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $n \in \omega$. Jeder Typ in $S_n(T)$ ist im abzählbaren saturierten Modell realisiert. Daher $|S_n(T)| \leq \aleph_0$.

$\Leftarrow$: Wenn $A \subseteq_{\text{end}} \mathcal{M} \models T$, gilt $|S_1(A)| \leq |S_{|A|+1}(T)| \leq \aleph_0$; in der Tat: Wenn $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ist $p(x, \overline{a}) \mapsto p(x, \overline{y})$ eine Injektion $S_1(A) \hookrightarrow S_{n+1}(T)$.

Wir bauen eine elementare Kette $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ abzählbarer Modelle. Sei $\mathcal{M}_0 \models T$ mit $|\mathcal{M}_0| = \aleph_0$, die nach Löwenheim-Skolem existiert. Wenn $\mathcal{M}_i$ konstruiert ist, sei $X := \bigcup_{A\subseteq_{\text{end}}\mathcal{M}_i} S_1(A)$. Dann $|X| \leq \aleph_0$. Somit durch Lemma 7.16 und Löwenheim-Skolem gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{M}_{i+1} \succeq \mathcal{M}_i$, die alle $p \in X$ realisiert.

Sei nun $\mathcal{M} := \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i \models T$. Dann $|\mathcal{M}| \leq \aleph_0$ und wenn $A \subseteq_{\text{end}} \mathcal{M}$, gilt $A \subseteq_{\text{end}} \mathcal{M}_i$ für eines $i \in \omega$. Daher alle $p \in S_1(A)$ sind in $\mathcal{M}_{i+1}$ realisiert, und deshalb sind in $\mathcal{M} \succeq \mathcal{M}_{i+1}$ realisiert.

□

8.2 Typenvermeidung

Definition 8.5. Sei T eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie.

- Eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$ heißt **konsistent** (mit T), wenn $T \not\models \neg\exists x.\, \psi(\overline{x})$.
- Ein Formelmenge $\Phi(\overline{x})$ in T heißt **isoliert**, wenn es eine konsistente $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x})$, sodass $\phi(\overline{x}) \vdash_T \Phi(\overline{x})$.

Satz 8.6 (Typenvermeidungssatz)**.** *Sei T eine abzählbare konsistente Theorie.*
Sei $(\Phi_k(\overline{x}_k))_{k\in\omega}$ nicht-isolierte Formelmengen. Dann existiert ein abzählbares Modell $\mathcal{M} \models T$, das jedes Φ_k vermeidet.

Beweis. Sei $C = \{c_i : i < \omega\}$ eine Menge von neuen Konstanten.
Aufzählen die $\mathcal{L}(C)$-Formeln in x als $(\psi_i(x) : i < \omega)$.
Sei $\xi : \{(k, \overline{c}) : k \in \omega;\ \overline{c} \in C^{|\overline{x}_k|}\} \to \omega$ eine Bijektion.
Wir konstruieren eine aufsteigende Kette $(\Sigma_i)_{i\in\omega}$ von Menge von $\mathcal{L}(C)$-Aussagen, sodass

(i) $|\Sigma_i| < \aleph_0$;

(ii) $T_i := T \cup \Sigma_i$ ist konsistent;

(iii) Wenn $j < i$, gibt es $c \in C$, sodass $T_i \models \exists x.\, \psi_j(x) \to \psi_j(c)$;

(iv) Wenn $\xi(k, \overline{c}) < i$, gibt es $\phi(\overline{x}_k) \in \Phi_k(\overline{x}_k)$, sodass $T_i \models \neg\phi(\overline{c})$.

Sei $\Sigma_0 := \emptyset$. Angenommen, dass Σ_i (i)-(iv) erfüllt.
Sei $c \in C$, das in weder Σ_i noch ψ_i vorkommt, und setze $\Sigma'_{i+1} := \Sigma_i \cup \{\exists x.\, \psi_i(x) \to \psi_i(c)\}$. Dann ist $T \cup \Sigma'_{i+1}$ konsistent.
Sei $\xi(k, \overline{c}) = i$, und setze $\overline{x} := \overline{x}_k$. Sei $\delta(\overline{x}, \overline{y})$, sodass $\bigwedge \Sigma'_{i+1} = \delta(\overline{c}, \overline{c}')$, wobei $\overline{c}' \in (C \setminus \{c_1, \ldots, c_{|\overline{x}|}\})^{<\omega}$. Nun $T \not\models \neg\exists\overline{x}.\, \exists\overline{y}.\, \delta(\overline{x}, \overline{y})$, also, weil Φ_k nicht isoliert ist, gibt es $\phi_i(\overline{x}) \in \Phi_k(\overline{x})$, sodass

$$\exists\overline{y}.\, \delta(\overline{x}, \overline{y}) \nvdash_T \phi_i(\overline{x})). \tag{*}$$

Setze $\Sigma_{i+1} := \Sigma'_{i+1} \cup \{\neg\phi_i(\overline{c})\}$. Dann ist $T \cup \Sigma_{i+1}$ konsistent nach (*).
Setze schleißlich $T_\omega := T \cup \bigcup_{i\in\omega} \Sigma_i$. Dann ist T_ω nach (ii) konsistent (weil $(\Sigma_i)_i$ eine aufsteigende Kette ist); sei $\mathcal{M} \models T_\omega$. Nach (iii) und dem Tarski-Test ist $\{c^{\mathcal{M}} : c \in C\}$ die Grundmenge eine aufzählbare elementare Unterstruktur $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$. Nach (iv) vermeidet $\mathcal{N}$ jedes Φ_k. □

8.3 Primmodelle

Definition 8.7. $\mathcal{M} \vDash T$ ist ein **primes** Modell (**Primmodell**) von eine Theorie T, wenn es in jedem Modell von T elementar einbettet.

Beispiel 8.8. $(\mathbb{Z}; S)$ ist ein Primmodell von seine Theorie.
$(\mathbb{Q}; <)$ ist ein Primmodell von DLO.

Definition 8.9. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ heißt **atomar**, wenn der Typ von jedem Tupel $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ isoliert ist.

Definition 8.10. Eine Formel $\phi(\overline{x})$ heißt **Atom** modulo T, wenn es konsistent mit T ist und einen Typ in T isoliert; äquivalent: Für kein $\psi(\overline{x})$ sind beide $\phi \wedge \psi$ und $\phi \wedge \neg\psi$ konsistent mit T.

Notation 8.11. $\overline{a}\overline{b} := (a_1, \ldots, a_{|\overline{a}|}, b_1, \ldots, b_{|\overline{b}|})$.

Lemma 8.12 ("Monotonie und Transitivität von Isolierung")**.** *Sei* $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. *Dann ist* $\operatorname{tp}(\overline{a}\overline{b})$ *isoliert gdw* $\operatorname{tp}(\overline{a}/\overline{b})$ *und* $\operatorname{tp}(\overline{b})$ *isoliert sind.*

Beweis. $\Rightarrow$: Angenommen, $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{a}\overline{b})$. Dann

- $\phi(\overline{x}, \overline{b})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{a}/\overline{b})$; in der Tat: Wenn $\overline{a} \vDash \psi(\overline{x}, \overline{b})$, gilt $\overline{a}\overline{b} \vDash \psi(\overline{x}, \overline{y})$, also gilt $\phi(\overline{x}, \overline{y}) \vdash_T \psi(\overline{x}, \overline{y})$, also gilt $\phi(\overline{x}, \overline{b}) \vdash_{T_{\overline{b}}} \psi(\overline{x}, \overline{b})$.
- $\exists \overline{x}.\, \phi(\overline{x}, \overline{y})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{b})$; in der Tat: Wenn $\overline{b} \vDash \psi(\overline{y})$, gilt $\phi(\overline{x}, \overline{y}) \vdash_T \psi(\overline{y})$, also gilt $\exists \overline{x}.\, \phi(\overline{x}, \overline{y}) \vdash_T \psi(\overline{y})$.

$\Leftarrow$: Angenommen, $\phi(\overline{y})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{b})$ und $\xi(\overline{x}, \overline{b})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{a}/\overline{b})$ (wobei $\xi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel ist).

Dann $\xi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \phi(\overline{y})$ isoliert $\operatorname{tp}(\overline{a}\overline{b})$. In der Tat: Wenn $\overline{a}\overline{b} \vDash \psi(\overline{x}, \overline{y})$, gilt $\overline{a} \vDash \psi(\overline{x}, \overline{b})$, also $\xi(\overline{x}, \overline{b}) \vdash_{T_{\overline{b}}} \psi(\overline{x}, \overline{b})$, also $\overline{b} \vDash \forall \overline{x}.\, (\xi(\overline{x}, y) \to \psi(\overline{x}, \overline{y}))$, also $T \vDash \forall \overline{y}.\, (\phi(\overline{y}) \to \forall \overline{x}.\, (\xi(\overline{x}, y) \to \psi(\overline{x}, \overline{y})))$, also $T \vDash \forall \overline{x}, \overline{y}.\, ((\xi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \phi(\overline{y})) \to \psi(\overline{x}, \overline{y}))$. □

Lemma 8.13. *Sei* $\mathcal{M}$ *eine unendliche* $\mathcal{L}$*-Struktur, wobei* $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$.

Dann ist $\mathcal{M}$ *ein Primmodell von* $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ *genau dann, wenn* $\mathcal{M}$ *abzählbar und atomar ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} \vDash T$ prim. Dann ist $\mathcal{M}$ abzählbar, weil es nach Löwenheim-Skolem in einem abzählbaren Modell einbettet. Sei $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Dann ist $\operatorname{tp}(\overline{a})$ in jedes $\mathcal{M}' \vDash T$ realisiert (nämlich durch $\theta(\overline{a})$, wobei $\theta : \mathcal{M} \overset{\preceq}{\hookrightarrow} \mathcal{M}'$). Nach das Typenvermeidungssatz ist $\operatorname{tp}(\overline{a})$ daher isoliert. Deshalb ist $\mathcal{M}$ atomar.

Sei umgekehrt $\mathcal{M} = (a_i)_{i \in \omega}$ abzählbar atomar, und sei $\mathcal{M}' \vDash T$. Wir konstruieren eine Kette von partiellen elementaren Abbildungen $\theta_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ mit $\operatorname{dom} \theta_i = \{a_j : j < i\}$.

Setze $\theta_0 := \emptyset$.

Sei θ_i konstruiert. $p_i := \operatorname{tp}(a_i/a_0, \ldots, a_{i-1})$ ist nach Atomizität (und Lemma 8.12) isoliert, und somit ist $p_i^{\theta_i}$ isoliert, also durch ein $b_i \in \mathcal{M}'$ realisiert. Setze $\theta_{i+1}(a_i) := b_i$. Dann ist θ_{i+1} partiell elementar (nach Lemma 7.20(ii)).

Dann ist $\bigcup_{i<\omega} \theta_i : \mathcal{M} \overset{\preceq}{\hookrightarrow} \mathcal{M}'$ eine elementare Einbettung. Daher ist $\mathcal{M}$ prim. □

Lemma 8.14. *Seien $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ abzählbare atomare elementar äquivalente Strukturen. Dann sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ isomorph.*

Beweis. ÜA. □

Proposition 8.15. *Sei T eine abzählbare Theorie. Dann hat T bis auf Isomorphie höchstens ein Primmodell.*

Beweis. ÜA (Es folgt aus Lemma 8.14 und Lemma 8.13). □

Definition 8.16. Wir sagen, dass **die isolierte Typen dicht in $S(T)$ sind**, wenn es für jede konsistent mit T Formel $\phi(\overline{x})$ einen isolierten Typ $p(\overline{x}) \in S(T)$ mit $\phi \in p$ gibt.

Satz 8.17. *Eine abzählbare vollständige Theorie T besitzt ein Primmodell genau dann, wenn die isolierte Typen dicht in $S(T)$ sind.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei (durch Lemma 8.13) $\mathcal{M} \vDash T$ abzählbar und atomar. Dann hat jede konsistente Formel $\phi(\overline{x})$ eine Realisierung in $\mathcal{M}$ (weil T vollständig ist), die nach Atomizität einen isolierten Typ besitzt.

$\Leftarrow$: Seien $n \in \omega$ und $\Psi_n(x_1, \ldots, x_n) := \{\neg\psi(\overline{x}) : \psi(\overline{x}) \text{ ein Atom}\}$. Nehmen wir an, dass eine Formel $\phi(\overline{x})$ die Formelmenge $\Psi_n(\overline{x})$ isoliert. Nach Dichtheit von isolierten Typen gilt $\psi(\overline{x}) \vdash_T \phi(\overline{x})$ für ein Atom $\psi(\overline{x})$, aber dann $\psi(\overline{x}) \vdash_T \neg\psi(\overline{x})$, was die Konsistenz von $\psi(\overline{x})$ widerspricht. Somit ist jedes $\Psi_n(\overline{x})$ nicht isoliert, also nach dem Typenvermeidungssatz gibt es ein aufzählbares $\mathcal{M} \vDash T$, das jedes Ψ_n vermeidet. Dann ist $\mathcal{M}$ atomar: Wenn $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, gibt es ein Atom $\psi(\overline{x})$, sodass $\overline{a} \nvDash \neg\psi(\overline{x})$, also $\overline{a} \vDash \psi(\overline{x})$, also $\psi(\overline{x})$ den Typ $\mathrm{tp}(\overline{a})$ isoliert. □

Notation 8.18. Wir schreiben Elemente von $2^{<\omega}$ oder 2^{ω} wie binäre Zeichenketten, mit $\emptyset$ für die leere Zeichenkette.

$s \lessdot t$ bedeutet, dass s ein Präfix von t ist, d.h. $t = st'$ für ein t'.

Definition 8.19. Ein **binärer Baum von Formeln** für eine Theorie T ist eine Familie von Formeln $(\phi_s(\overline{x}))_{s \in 2^{<\omega}}$, sodass für alle $s \in 2^{<\omega}$:

- $\phi_s(\overline{x})$ ist konsistent mit T;
- $\phi_{s0}(\overline{x}) \vdash_T \phi_s(\overline{x})$ and $\phi_{s1}(\overline{x}) \vdash_T \phi_s(\overline{x})$;
- $\phi_{s0}(\overline{x}) \vdash_T \neg\phi_{s1}(\overline{x})$.

Lemma 8.20. *Wenn eine abzählbare Theorie T hat einen binären Baum von Formeln, gilt $S(T) = 2^{\aleph_0}$.*

Beweis. Sei $(\phi_s(\overline{x}))_{s \in 2^{<\omega}}$ ein binärer Baum mit $|\overline{x}| = n$. Für $t \in 2^{\omega}$ ist $\{P_s(\overline{x}) : s \lessdot t\}$ konsistent, also lässt es sich zu einen Typ $p_t(\overline{x}) \in S_n(T)$ erweitern. Wenn $t \neq t'$, existiert $s \in 2^{<\omega}$, sodass $s0 \lessdot t$ und $s1 \lessdot t'$ oder umgekehrt, also $p_t(\overline{x}) \neq p_{t'}(\overline{x})$.

Somit $|S(T)| \geq |S_n(T)| \geq |2^{\omega}| = 2^{\aleph_0}$.

Weil die Sprache $\mathcal{L}$ von T abzählbar ist, gilt $|S(T)| \leq |\mathcal{P}(\{\mathcal{L}\text{-Formeln}\})| = 2^{\aleph_0}$. □

Beispiel 8.21. Betrachte 2^ω als eine Struktur in der Sprache $\{P_s : s \in 2^{<\omega}\}$, wobei $P_s(2^\omega) := \{t : s \lessdot t\}$, und sei T_{BB} ihre Theorie.

Dann ist $\{P_s(x) : s \in 2^{<\omega}\}$ ein binärer Baum von Formeln in T_{BB}.

Übung: T_{BB} besitzt QE. Es folgt, dass $2^\omega \ni t \mapsto \mathrm{tp}(t) \in S_1(T_{\mathrm{BB}})$ eine Bijektion ist, und keiner dieser Typen isoliert sind.

Daher ist T_{BB} nicht schmal, und die isolierte Typen sind nicht dicht, und es gibt kein Primmodell.

Bonus Übung: Beschreiben Sie ein explizites abzählbares Modell.

Lemma 8.22. *Sei T eine konsistent Theorie.*

(i) Wenn die isolierte Typen nicht dicht in $S(T)$ sind, hat T einen binären Baum von Formeln.

(ii) Wenn T schmal ist, sind die isolierte Typen dicht in $S(T)$.

Beweis. (i) Sei $\phi_\emptyset(\overline{x})$ konsistent und in kein isolierten Typ.

Wenn $\phi_s(\overline{x})$ konsistent und in kein isolierten Typ ist ($s \in 2^{<\omega}$), ist $\phi_s(\overline{x})$ kein Atom, also gibt es $\psi(\overline{x})$, sodass $\phi_{s0} := \phi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x})$ und $\phi_{s1} := \phi(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})$ konsistent sind, und beide in kein isolierten Typ ist (weil ϕ diese Eigenschaft hat).

Daher können wir rekursiv konstruieren einen binären Baum von Formeln $(\phi_s(\overline{x}))_{s\in 2^{<\omega}}$.

(ii) Folgt aus (i) und Lemma 8.20.

□

Proposition 8.23. *Jede abzählbare vollständige schmale Theorie besitzt ein Primmodell.*

Beweis. Nach Lemma 8.22(ii) und Satz 8.17. □

Bemerkung 8.24. Die Umkehrung ist falsch; betrachte $(\mathbb{Q}; <)_{\mathbb{Q}}$ (ÜA).

Beispiel 8.25. Sei k ein abzählbarer Körper. Die Theorie von unendliche k-Vektorräume ist vollständig, abzählbar, und schmal. Die abzählbare Modelle sind die Vektorräume V_d von Dimensionen $d \in (\omega \setminus 0) \cup \{\aleph_0\}$. V_1 ist das Primmodell, und $V_{\aleph_0}$ ist das abzählbare saturierte Modell.

Proposition 8.26. *Für eine abzählbare Theorie T, sind äquivalent:*

(i) T ist nicht schmal, d.h. $|S(T)| > \aleph_0$;

(ii) T hat einen binären Baum von Formeln;

(iii) $|S(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Außerdem, wenn T nicht schmal ist, gilt

(iv) T besitzt $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle bis auf Isomorphie.

Beweis. ÜA. □

Bemerkung 8.27. Es gibt schmale Theorien mit $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle; z.B. $\mathrm{Th}((\omega \times \omega; (P_i)_i)_{\omega\times\omega})$, wobei $P_i(\omega \times \omega) = \{i\} \times \omega$.

Korollar 8.28. *Wenn eine abzählbare Theorie T besitzt abzählbar viele abzählbare Modelle, ist T schmal, also besitzt T ein abzählbares Primmodell und ein abzählbares saturiertes Modell.*

Vermutung 8.29 (Vaught)**.** *Wenn T eine abzählbare Theorie mit überabzählbar vielen abzählbare Modelle, besitzt T genau $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle.*

(Bemerkung: Einfach hat eine abzählbare Theorie höchstens $2^{\aleph_0}$ abzählbare Modelle. Daher ist die Vermutung sofort wahr, wenn wir die Kontinuumhypothese annehmen.)

8.4 Ryll-Nardzewski

Satz 8.30 (Ryll-Nardzewski)**.** *Sei T eine vollständige abzählbare $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modelle. Dann sind äquivalent:*

(A) T ist $\aleph_0$-kategorisch.

- *(B1) Für alle $n \in \omega$ und $\mathcal{M} \models T$ gibt es nur endlich viele definierbaren Teilmengen von $\mathcal{M}^n$.*

  (B1') Für alle $n \in \omega$ gilt $|\Phi_{n,T}| < \aleph_0$, wobei $\Phi_{n,T} := {}^{\{\phi(x_1,\ldots,x_n)\}}/_{\leftrightarrow_T}$ die Menge von $(\leftrightarrow_T)$-Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

  (B2) Jeder Typ in T ist isoliert.

  (B3) Für alle $n \in \omega$ gilt $|S_n(T)| < \aleph_0$.

(C) Jedes abzählbares Modell von T ist saturiert.

(D) Jedes abzählbares Modell von T ist prim.

(E) T hat ein abzählbares Modell, das saturiert und prim ist.

(Die Äquivalenz (A) $\Leftrightarrow$ (B1) ist die Hauptbehauptung, und ist die, worauf sich "das Satz von Ryll-Nardzewski" am häufigsten bezieht)

Beweis.

(B1) $\Leftrightarrow$ (B1') Sei $\mathcal{M} \models T$. Dann $\phi(\overline{x}) \leftrightarrow_T \psi(\overline{x})$ gdw $\phi(\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$.

(B1') $\Rightarrow$ (B2) Sei $p(\overline{x}) \in S(T)$. Dann enthält $p(\overline{x})$ nach (B1') nur endlich viele Formeln $\phi_1(\overline{x}), \ldots, \phi_k(\overline{x})$ bis auf Äquivalenz. Dann $\bigwedge_i \phi_i \in p$ isoliert p.

(B2) $\Rightarrow$ (B3) Sei jedes $p(\overline{x}) \in S(T)$ durch $\phi_p(\overline{x})$ isoliert. Sei $n \in \omega$.

Nehmen wir an, dass $|S_n(T)|$ unendlich ist. Dann ist $\{\neg\phi_p(\overline{x}) : p \in S_n(T)\}$ endlich erfüllbar, somit lässt es sich zu ein $p \in S_n(T)$ erweitern. Aber dann gilt $\phi_p \vdash_T p \ni \neg\phi_p$, was die Konsistenz von ϕ_p widerspricht.

(B3) $\Rightarrow$ (B1') Die Abbildung $\phi(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{p \in S_n(T) : \phi(\overline{x}) \in p(\overline{x})\}$ induziert eine Injektion $\Phi_{n,T} \longhookrightarrow \mathcal{P}(S_n(T))$; in der Tat: Wenn $\phi(\overline{x}) \not\leftrightarrow_T \psi(\overline{x})$, gilt $T \models \exists\overline{x}.\ \neg(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$, somit für ein $p \in S_n(T)$ haben wir $\phi \in p \not\Leftrightarrow \psi \in p$. Daher ist $\Phi_{n,T}$ endlich, wenn $S_n(T)$ endlich ist.

Für die übrige Äquivalenzen beachte, dass T kein endliches Modell hat, weil T vollständig ist und unendliche Modelle hat; daher hat jedes abzählbares Modell von T Mächtigkeit $\aleph_0$.

(A) ⇒ (D) Nach Löwenheim-Skolem hat jedes Modell von T ein abzählbares elementares Unterstruktur. Wenn $\mathcal{M}$ das eindeutig bestimmtes abzählbares Modell ist, einbettet es deswegen in jedes Modell, und ist es daher prim.

(D) ⇒ (B2) Jeden Typ ist (nach Löwenheim-Skolem) in einem abzählbares Modell realisiert, das nach (D) und Lemma 8.13 atomar ist.

(B2) ⇒ (C) Sei $\mathcal{M} \models T$ abzählbar, und sei $A \subseteq_{\text{end}} \mathcal{M}$. Dann ist jedes $p \in S(A)$ isoliert nach (B2) (und Lemma 8.12), und also ist p in $\mathcal{M}$ realisiert. Somit ist $\mathcal{M}$ saturiert.

(C) ⇒ (A) Lemma 7.21.

((C) ∧ (D)) ⇒ (E) Ein abzählbares Modell existiert nach Löwenheim-Skolem. Daher ist die Behauptung sofort.

(E) ⇒ (D) Wenn $\mathcal{M} \models T$ ein abzählbares saturiertes Primmodell ist und $\mathcal{N} \models T$ abzählbar ist, gibt es nach Lemma 7.23 eine Einbettung $\mathcal{N} \overset{\preceq}{\hookrightarrow} \mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{N}$ prim, weil $\mathcal{M}$ prim ist.

□

Bemerkung 8.31. Wir können auch direkte Beweise von einigen anderer Folgen geben:

(A) ⇒ (B) Wenn ein Typ p nicht isoliert ist, haben wir nach dem Typenvermeidungssatz ein abzählbares Modell, das p vermeidet; aber wir haben auch ein abzählbares Modell, das p realisiert.

(B2) ⇒ (D) Lemma 8.13.

(D) ⇒ (A) Proposition 8.15.

((A) ∧ (B)) ⇒ (E) Nach (B) ist T schmal. Daher gibt es ein saturiertes Modell und ein primes Modell. Nach (A) sind sie Isomorph.

(E) ⇒ (B2) Nach (E) realisiert ein atomares Modell jeden Typ.

8.5 Fraïssé-Konstruktionen

Sei $\mathcal{L}$ endlich und relational, d.h. $\mathcal{L}$ enthält nur Relationszeichen. In diesem Abschnitt erlauben wir die leere $\mathcal{L}$-Struktur $\emptyset$ als eine $\mathcal{L}$-Struktur.

Unseres Ziel ist, $\aleph_0$-kategorische Theorien zu finden.

Bemerkung 8.32. Sei $n \in \omega$. Es gibt bis auf Isomorphie nur endlich viele $\mathcal{L}$-Strukturen der Mächtigkeit n.

Definition 8.33. Das **Alter** einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist die Klasse von endliche $\mathcal{L}$-Strukturen, die in $\mathcal{M}$ einbetten,

$$\operatorname{age}(\mathcal{M}) := \{\mathcal{A} : |\mathcal{A}| < \aleph_0;\ \exists f : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}\} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}' \leq_{\text{end}} \mathcal{M}\}.$$

Lemma 8.34. *Jedes Alter $\mathcal{K}$ erfüllt:*

(HP) Wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, ist $\operatorname{age}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{K}$*;*

(JEP) *Wenn $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{K}$, gibt es $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $f_i : \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{C}$.*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} & \\ \mathcal{B}_1 \arrow[ur, hook, dotted, "f_1"] & & \mathcal{B}_2 \arrow[ul, hook', dotted, "f_2"'] \end{tikzcd}.$$

Beweis. (HP) Klar.

(JEP) Sei $f_i : \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{M}$. Sei $\mathcal{C} := \langle f_1(\mathcal{B}_1) \cup f_2(\mathcal{B}_2) \rangle^{\mathcal{M}} \leq \mathcal{M}$. Dann $f_i : \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{K}$.

□

Umgekehrt:

Lemma 8.35. *Jede nicht-leere Klasse $\mathcal{K}$ von endliche $\mathcal{L}$-Strukturen, das (HP) und (JEP) erfüllt, ist das Alter einer abzählbaren $\mathcal{L}$-Struktur.*

Beweis. Nach Bemerkung 8.32 gibt es $\mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$ für $i \in \omega$, sodass jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ zu einem $\mathcal{A}_i$ isomorph ist.

Wir konstruieren eine abzählbare Kette $\mathcal{D}_0 \leq \mathcal{D}_1 \leq \ldots$ mit $\mathcal{D}_i \in \mathcal{K}$, sodass jedes $\mathcal{A}_j$ für $j < i$ in $\mathcal{D}_i$ einbettet.

Sei $\mathcal{D}_0 := \emptyset$ (das in $\mathcal{K}$ ist nach (HP) und $\mathcal{K} \neq \emptyset$). Sei $\mathcal{D}_i$ konstruiert. Nach (JEP) gibt es $\mathcal{D}'_{i+1} \in \mathcal{K}$, sodass $\mathcal{D}_i$ und $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{D}'_{i+1}$ einbetten. Sei (nach Lemma 2.2) $\mathcal{D}_{i+1} \cong \mathcal{D}'_{i+1}$ mit $\mathcal{D}_i \leq \mathcal{D}_{i+1}$. Dann einbettet $\mathcal{A}_i$ auch in $\mathcal{D}_{i+1}$.

Sei $\mathcal{M} := \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{D}_i$, das abzählbar ist, weil jedes $\mathcal{D}_i$ endlich ist. Dann einbettet jedes $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{M}$, also $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{age}(\mathcal{M})$. Umgekehrt: wenn $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}$, gilt $\mathcal{A} \leq \mathcal{D}_i$ für ein i, also nach (HP) $\mathcal{A} \in \mathrm{age}(\mathcal{K})$. □

Lemma 8.36. *Jede konsistente $\mathcal{L}$-Theorie mit QE und mit unendlichen Modelle ist $\aleph_0$-kategorisch.*

Beweis. Für jedes $n \in \omega$ gibt es nur endlich viele atomar $\mathcal{L}$-Formeln in freie Variablen $x_1, \ldots, x_n$, also gibt es nur endlich viele qf $\mathcal{L}$-Formeln in $\overline{x}$ bis auf Äquivalenz. Die Behauptung folgt nach Ryll-Nardzewski. □

Definition 8.37. Eine **Fraïssé-Klasse** ist eine Klasse $\mathcal{K}$ von endliche $\mathcal{L}$-Strukturen, die beliebig große Strukturen enthält und (HP) sowie (AP) erfüllt, wobei:

(AP) Wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{K}$ und $g_i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}_i$ Einbettungen sind, gibt es $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $f_i : \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{C}$, sodass $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} & \\ \mathcal{B}_1 \arrow[ur, hook, dotted, "f_1"] & & \mathcal{B}_2 \arrow[ul, hook', dotted, "f_2"'] \\ & \mathcal{A} \arrow[ul, hook', "g_1"] \arrow[ur, hook, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Remark 8.38. (AP) impliziert (JEP): Setze $\mathcal{A} := \emptyset$.

Satz 8.39 (Fraïssé)**.**

(i) Sei $\mathcal{K}$ eine Fraïssé-Klasse. Dann existiert eine eindeutig bestimmte $\mathcal{L}$-Theorie $T_{\mathcal{K}}$, sodass $T_{\mathcal{K}}$ QE und unendliche Modelle besitzt, und jedes Modell von $T_{\mathcal{K}}$ Alter $\mathcal{K}$ hat.

Das eindeutig bestimmte abzählbare Modell von $T_{\mathcal{K}}$ ist der **Fraisse-Limes** *von $\mathcal{K}$.*

(ii) Umgekehrt: wenn $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur mit QE ist, ist age($\mathcal{M}$) *eine Fraïssé-Klasse.*

Beispiel 8.40.

- Die Klasse von endliche lineare Ordnungen ist eine Fraïssé-Klasse mit Fraïssé-Limes $(\mathbb{Q}; <)$.
- Die Klasse von endliche Graphen ist eine Fraïssé-Klasse mit Fraïssé-Limes der abzählbare Zufallsgraph.

Beweis. Für $\mathcal{A}$ eine endliche $\mathcal{L}$-Struktur: Sei $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, und setze

$$\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge\{\phi(\overline{x}) : \phi(\overline{x}) \text{ basic; } \mathcal{A} \vDash \phi(\overline{a})\}.$$

Für $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\overline{a}' \in \mathcal{M}^n$, gilt $\mathcal{M} \vDash \phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{a}')$ gdw $\overline{a}' \mapsto \overline{a}$ einen Isomorphismus $\langle\overline{a}'\rangle^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}$ definiert.

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur mit QE. Setze $\mathcal{K} :=$ age($\mathcal{M}$).

Behauptung. *Seien $g : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\mathcal{B} = \{g(a_1), \ldots, g(a_n), b_1, \ldots, b_m\}$. Dann*

$$\mathcal{M} \vDash \theta_{\mathcal{A},\mathcal{B},g,\overline{a},\overline{b}} := \forall\overline{x}.\, (\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \to \exists\overline{y}.\, \phi_{\mathcal{B},g(\overline{a})\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})).$$

Beweis. $\mathcal{B} \in \mathcal{K} =$ age($\mathcal{M}$), also sei $\overline{c}\overline{d} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ mit $\mathcal{M} \vDash \phi_{\mathcal{B},g(\overline{a})\overline{b}}(\overline{c}, \overline{d})$. Dann $\mathcal{M} \vDash \exists\overline{y}.\phi_{\mathcal{B},g(\overline{a})\overline{b}}(\overline{c}, \overline{y})$. Nun $\mathcal{M} \vDash \phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{c})$, und nach QE ist $\exists\overline{y}.\phi_{\mathcal{B},g(\overline{a})\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$ zu eine qf Formel äquivalent, also ist es durch $\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ impliziert. □

Wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ eine Fraïssé-Klasse ist.
Nach Lemma 8.34 besitzt $\mathcal{K} =$ age($\mathcal{M}$) (HP).
Sei $g_i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}_i$ wie in (AP). Durch Komposition mit einem Isomorphismus können wir annehmen, dass $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}$.
Seien $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\mathcal{B}_i = \{g_i(a_1), \ldots, g_i(a_n), b^i_1, \ldots, b^i_{m_i}\}$.
Nach der Behauptung gilt $\mathcal{M} \vDash \theta_{\mathcal{A},\mathcal{B}_i,g_i,\overline{a},\overline{b}^i}$,
also gilt $\mathcal{M} \vDash \bigwedge_{i=1,2} \exists\overline{y}.\, \phi_{\mathcal{B}_i,g_i(\overline{a})\overline{b}^i}(\overline{a}, \overline{y}))$.
Seien $\overline{c}^1$ und $\overline{c}^2$ Zeugen; dann definieren

$$f_i(g_i(\overline{a})) := \overline{a};\ f_i(\overline{b}^i) := \overline{c}^i$$

Einbettungen $f_i : \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{M}$ mit $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.
Daher gilt (AP) mit $\mathcal{C} := \langle f_1(\mathcal{B}_1) \cup f_2(\mathcal{B}_2)\rangle^{\mathcal{M}}$.

(i) Sei $\mathcal{K}$ eine Fraïssé-Klasse.

Für $n \in \omega$ sei $\mathcal{K}_n \subseteq_{\text{end}} \mathcal{K}$, sodass jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ mit $|\mathcal{A}| \leq n$ isomorph zu einem $\mathcal{A}' \in \mathcal{K}_n$ ist, und setze

$$\chi_n(x_1, \ldots, x_n) := \forall \overline{x}. \bigvee \{\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) : \mathcal{A} \in \mathcal{K}_n;\ \mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}\}).$$

Sei $\Theta_{\mathcal{K}}$ die Klasse von Tripeln $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \overline{a}, \overline{b})$ mit $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$.
Sei $\theta_{\mathcal{A},\mathcal{B},\overline{a},\overline{b}} := \theta_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathrm{id}_{\mathcal{A}},\overline{a},\overline{b}}$.
Sei

$$T_{\mathcal{K}} := \{\theta_{\mathcal{A},\mathcal{B},\overline{a},\overline{b}} : (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \overline{a}, \overline{b}) \in \Theta_{\mathcal{K}}\} \cup \{\chi_n : n \in \omega\}.$$

Jedes Modell von $T_{\mathcal{K}}$ hat Alter $\mathcal{K}$, weil es die Aussagen χ_n und $\theta_{\emptyset,\mathcal{B},\emptyset,\overline{b}}$ erfüllt. Wenn $\mathcal{M}$ QE hat und $\mathrm{age}(\mathcal{M}) = \mathcal{K}$, gilt nach die vorherige Behauptung $\mathcal{M} \models T_{\mathcal{K}}$.

Es genügt dann zu ziegen, dass $T_{\mathcal{K}}$ QE und unendliche Modelle besitzt. In der Tat: es folgt (nach Korollar 5.16), dass $T_{\mathcal{K}}$ vollständig ist, also die behauptete Eindeutigkeit von $T_{\mathcal{K}}$ folgt.

Wir verifizieren QE via Satz 5.15(iii).
Sei $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T_{\mathcal{K}}$ eine endliche gemeinsame Unterstruktur von Modelle von $T_{\mathcal{K}}$.
Sei $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Sei $\exists y.\, \psi(\overline{x}, y)$ eine primitiv existentielle $\mathcal{L}$-Formel
. Sei $b \in \mathcal{M}_1$ mit $\mathcal{M}_1 \models \psi(\overline{a}, b)$.
Sei $\mathcal{B} = \langle \overline{a}b \rangle^{\mathcal{M}_1}$.
Weil $\mathcal{M}_1 \models \chi_{n+1}$, gilt $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$.
Dann ist $\psi(\overline{x}, y)$ durch $\phi_{\mathcal{B},\overline{a}b}(\overline{x}, y)$ impliziert.
Weil $\mathcal{M}_2 \models \theta_{\mathcal{A},\mathcal{B},\overline{a},b}$ und $\mathcal{M}_2 \models \phi_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{a})$,
gilt $\mathcal{M}_2 \models \exists y.\, \psi(\overline{a}, y)$, wie gewünscht.

Schließlich konstruieren wir ein unendliches Modell von $T_{\mathcal{K}}$

Behauptung. *Seien $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \overline{a}, \overline{b}) \in \Theta$ und $\mathcal{A} \leq \mathcal{D} \in \mathcal{K}$. Dann gibt es $\mathcal{D}' \in \mathcal{K}$, sodass $\mathcal{D} \leq \mathcal{D}'$, und es eine Einbettung $f : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{D}'$ mit $f\restriction_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}\restriction_{\mathcal{A}}$ gibt.*

Beweis. Folgt sofort aus (AP) (und Lemma 2.2). □

Sei $\xi : \omega \times \omega \to \omega$ eine Bijektion mit $\xi(i, j) \geq i$.

Wir konstruieren eine abzählbare Kette $\mathcal{D}_0 \leq \mathcal{D}_1 \leq \ldots$ mit $\mathcal{D}_k \in \mathcal{K}$.
Wir konstruieren gleichzeitig eine Folge $(\mathcal{A}_i, \overline{a}_i)_{i\in\omega}$,
und für $k \in \omega$ ein $m_k > k$,
sodass, wenn $\overline{a}$ ein Tupel von verschiedenen Elementen von $\mathcal{D}_k$ ist,
ist $\overline{a} = \overline{a}_i$ für ein $i < m_k$
und $\mathcal{A}_i = \langle \overline{a}_i \rangle^{\mathcal{D}_k} \leq \mathcal{D}_k$ gilt für alle $i < m_k$.

Für jedes $i \in \omega$ nehmen wir (nach Bemerkung 8.32) eine Folge $(\mathcal{B}^i_j, \overline{b}^i_j)_{j\in\omega}$
mit $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}^i_j, \overline{a}_i\overline{b}^i_j) \in \Theta$,
sodass, wenn $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}, \overline{a}_i\overline{b}) \in \Theta$, definiert

$$\overline{b} \mapsto \overline{b}^i_j;\ \overline{a}_i \mapsto \overline{a}_i$$

einen Isomorphismus $\mathcal{B} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}^i_j$.
Sei $\mathcal{D}_0 := \emptyset$ (und $\mathcal{A}_0 := \emptyset$ und $m_0 := 1$).
Sei $\mathcal{D}_k$ konstruiert. Sei $k = \xi(i, j)$.
Es gilt $i \leq \xi(i, j) = k < m_k$, also $\mathcal{A}_i \leq \mathcal{D}_k$.
Nach die Behauptung gibt es $\mathcal{D}_k \leq \mathcal{D}_{k+1} \in \mathcal{K}$,
sodass $\mathcal{B}^i_j$ in $\mathcal{D}_{k+1}$ über $\mathcal{A}_i$ einbettet;
d.h. $\mathcal{D}_{k+1} \vDash \exists y.\ \phi_{\mathcal{B}^i_j, \overline{a}_i \overline{b}}(\overline{a}_i, y)$.
Wir können $(\mathcal{A}_i, \overline{a}_i)_i$verlängern, sodass die Unterstrukturen von $\mathcal{D}_{k+1}$ vorkommt, und $m_{k+1} > m_k$ entsprechend setzen.
Dann $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{D}_k \vDash \theta_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \overline{a}, \overline{b}}$ für alle $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \overline{a}, \overline{b}) \in \Theta$.
Auch $\mathcal{M} \vDash \chi_n$, weil $\mathcal{D}_k \in \mathcal{K}$. Daher $\mathcal{M} \vDash T_{\mathcal{K}}$.
Schließlich ist $\mathcal{M}$ unendlich, weil $\mathcal{K}$ unbeschränkt große endliche Strukturen enthält.

□

Bemerkung 8.41. Analoga von Satz 8.39 existieren für beliebigen abzählbaren Sprachen, mit endlich erzeugte Unterstrukturen statt endliche Unterstrukturen.

In nicht-relationaler Sprachen müssen (JEP) sowie (AP) vorausgesetzt werden, oder äquivalent (AP) und $\langle\emptyset\rangle^{\mathcal{A}} \cong \langle\emptyset\rangle^{\mathcal{B}}$ für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

In dieser Allgemeinheit sind $\aleph_0$-Kategorizität und QE zu *Ultrahomogeneity* des Fraïssé-Limes geschwächt, wobei Ultrahomogeneity heißt, dass jeder partieller Automorphismus mit endlich erzeugten Definitionsbereich sich zu einem Automorphismus erweitern lässt. Das Beweis ist in Wesentlichen gleich.

Es gibt weitere Verallgemeinerungen, einschließlich "Hrushovski-Fraïssé Konstruktionen", in den (HP) locker wird.

9 Kofinalität und Regulärität

Definition 9.1. Sei X eine linear geordnete Menge.

- eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **kofinal**, wenn $\forall b \in X.\ \exists a \in A.\ a \geq b$.
- Die **Kofinalität** von X, geschrieben $\operatorname{cof}(X)$, ist die minimale Mächtigkeit einer kofinalen Teilmenge.
- Eine unendliche Kardinalzahl λ heißt **regulär**, wenn $\operatorname{cof}(\lambda) = \lambda$, sonst heißt sie **singulär**.

Lemma 9.2. *Seien λ eine reguläre Kardinalzahl und $(A_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ eine ansteigende Kette von Mengen. Sei $B \subseteq \bigcup_{\alpha \in \lambda} A_\alpha$ mit $|B| < \lambda$. Dann gibt es eine Ordinalzahl $\alpha \in \lambda$, sodass $B \subseteq A_\alpha$.*

Beweis. Sonst ist $\{\inf\{\alpha : b \in A_\alpha\} : b \in B\}$ kofinal, also $\operatorname{cof}(\lambda) \leq |B| < \lambda$, was Regulärität widerspricht. □

Proposition 9.3. *Unendliche Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär.*

Beweis. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Sei $A \subseteq \kappa^+$ mit $|A| < \kappa^+$. Dann $|A| \leq \kappa$ und jedes $\alpha \in A$ hat Mächtigkeit $|\alpha| \leq \kappa$, also $|\bigcup_{\alpha \in A} \alpha| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. Dann $\sup_{\alpha \in A} \alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha < \kappa^+$, also ist A nicht in κ^+ kofinal.

Daher $\operatorname{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$. □

10 Saturiertheit

10.1 Existenz

Definition 10.1. Für $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M}$, setze

$$\restriction_A : S(B) \twoheadrightarrow S(A);\ \mathrm{tp}(a/B) \mapsto \mathrm{tp}(a/A)$$

(für $a \in \mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$).

Proposition 10.2. *Sei T eine Theorie mit unendlichen Modelle.*

Sei $\kappa \leq \lambda \geq |T|$ unendliche Kardinalzahlen, sodass für jedes $\mathcal{M} \vDash T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \lambda$ es eine Menge $\Xi_{\mathcal{M}} \subseteq S_1(\mathcal{M})$ mit $|\Xi_{\mathcal{M}}| \leq \lambda$ gibt, sodass für jedes $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| \leq \kappa$ es $\restriction_A (\Xi_{\mathcal{M}}) = S_1(A)$ gilt.

Dann hat T ein κ^+-saturiertes Modell der Mächtigkeit $\lambda + \kappa^+$.

Korollar 10.3. *Sei T eine Theorie mit unendlichen Modelle.*

Für jede unendliche Kardinalzahl $\kappa \geq |T|$ hat T ein κ^+-saturiertes Modell der Mächtigkeit 2^κ.

Insbesondere hat T ein μ-saturiertes Modell für jede unendliche Kardinalzahl μ.

Beweis. Seien $\mathcal{M} \vDash T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \lambda$ und $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| \leq \kappa$. Dann $|S_1(A)| \leq 2^{|T_A|} = 2^{|T|+|A|} \leq 2^\kappa$. Außerdem

$$|A \subseteq \mathcal{M} : |A| \leq \kappa| \leq |\mathcal{M}|^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa.$$

Daher

$$\left| \bigcup_{A \subseteq \mathcal{M};\ |A| \leq \kappa} S_1(A) \right| \leq 2^\kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa = \lambda.$$

Also gibt es $|\Xi_{\mathcal{M}}| \leq \lambda$ wie gewünscht.

Schließlich: $2^\kappa + \kappa^+ = 2^\kappa$. □

Bemerkung 10.4. Es folgt, dass wenn $\lambda^+ = 2^\lambda$, insbesondere wenn wir GCH annehmen, hat T ein saturietes Modell der Mächtigkeit λ^+. Aber es ist (unter der Annahme der Existenz einer “vernünftigen” großen Kardinalzahl) mit ZFC konsistent, dass keine unendliche Kardinalzahl λ existiert mit $2^\lambda = \lambda^+$.

Beweis von Proposition 10.2. Wir konstruieren eine elementare Kette $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in \kappa^+}$ von Modelle der Mächtigkeit λ.

Sei (nach Löwenheim-Skolem) $\mathcal{M}_0 \vDash T$ mit $|\mathcal{M}_0| = \lambda$. Für $\eta \in \kappa^+$ eine Limeszahl setze $\mathcal{M}_\eta := \bigcup_{\alpha<\eta} \mathcal{M}_\alpha$. Nach Lemma 8.1 $\mathcal{M}_\eta \succeq \mathcal{M}_\alpha$ für $\alpha < \eta$. Weil $|\eta| \leq \kappa \leq \lambda$, gilt $|\mathcal{M}_\eta| = \lambda$.

Sei $\mathcal{M}_\alpha$ konstruiert. Nach Lemma 7.16 und Löwenheim-Skolem gibt es $\mathcal{M}_{\alpha+1} \succeq \mathcal{M}_\alpha$ mit $|\mathcal{M}_{\alpha+1}| = \lambda$, das jeden Typ in $\Xi_{\mathcal{M}_\alpha}$ und also jeden Typ in $S_1(A)$ for $A \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ with $|A| \leq \kappa$ realisiert.

Nun sei $\mathcal{M} := \bigcup_{\alpha \in \kappa^+} \mathcal{M}_\alpha$. Dann $\lambda \leq |\mathcal{M}| \leq \lambda \cdot \kappa^+ = \lambda + \kappa^+$.

Sei $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa^+$. Weil κ^+ eine Nachfolgerkardinalzahl also regulär ist, ist $A \subseteq \mathcal{M}_\alpha$ für ein $\alpha \in \kappa^+$. Somit ist jedes $p \in S(A)$ in $\mathcal{M}_{\alpha+1} \preceq \mathcal{M}$ also in $\mathcal{M}$ realisiert. Daher ist $\mathcal{M}$ κ^+-saturiert.

Es folgt, dass $|\mathcal{M}| \geq \kappa^+$, also $|\mathcal{M}| = \lambda + \kappa^+$. □

10.2 Stability

Definition 10.5. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.

Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt **κ-stabil**, wenn $|S_1(A)| \leq \kappa$ für alle $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| \leq \kappa$.

Eine Theorie T heißt **κ-stabil**, wenn es unendliche Modelle hat und jedes Modell $\mathcal{M} \vDash T$ κ-stabil ist.

Ein Modell oder eine Theorie heißt **stabil**, wenn es κ-stable ist für eine unendliche Kardinalzahl κ.

Wir oft schreiben ω-stabil statt $\aleph_0$-stabil.

Beispiel 10.6. T_∞ und $T_{(\mathbb{Q};+)}$ sind ω-stabil.

DLO ist nicht stabil.

Korollar 10.7 (von Proposition 10.2)**.** *Sei T eine λ-stabil Theorie, wobei $\lambda \geq |T|$.*

(i) T besitzt eine saturiertes Modell der Mächtigkeit λ^+.

(ii) Sei $\kappa < \lambda$. Dann besitzt T ein κ^+-saturiertes Modell der Mächtigkeit λ.

Beweis. Sei $\kappa \leq \lambda$. Nach Proposition 10.2 mit $\Xi_{\mathcal{M}} := S_1(\mathcal{M})$ gibt es ein κ^+-saturiertes Modell der Mächtigkeit $\lambda + \kappa^+$.

Dann folgt (i) mit $\kappa := \lambda$, und (ii) mit $\kappa < \lambda$. □

10.3 QE und Saturiertheit

Notation 10.8.

- Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Für $\bar{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$,

$$\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) := \{\phi(\bar{x}) : \phi \text{ qf } \mathcal{L}(A)\text{-Formel; } \mathcal{M} \vDash \phi(\bar{b})\}.$$

- Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Für $\bar{b}_i \in \mathcal{M}_i^{<\omega}$ bedeutet

$$\bar{b}_1 \equiv \bar{b}_2,$$

  dass $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_1}(\bar{b}_1) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}_2}(\bar{b}_2)$, und

$$\bar{b}_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \bar{b}_2$$

  bedeutet, dass $\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}_1}(\bar{b}_1) = \mathrm{qftp}^{\mathcal{M}_2}(\bar{b}_2)$.

- Wenn $A \subseteq \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ eine gemeinsame Teilmenge ist, bedeutet

$$\bar{b}_1 \equiv_A \bar{b}_2,$$

  dass $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_1}(\bar{b}_1/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}_2}(\bar{b}_2/A)$; ähnlich für $\bar{b}_1 \equiv_A^{\mathrm{qf}} \bar{b}_2$.

Bemerkung 10.9.

- $\bar{b}_1 \equiv \bar{b}_2$ genau dann, wenn $\bar{b}_1 \mapsto \bar{b}_2$ eine partielle elementare Abbildung $\mathcal{M}_1 \dashrightarrow \mathcal{M}_2$ definiert.
- $\bar{b}_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \bar{b}_2$ genau dann, wenn $\bar{b}_1 \mapsto \bar{b}_2$ einen partiellen Isomorphismus $\mathcal{M}_1 \dashrightarrow \mathcal{M}_2$ definiert.

Proposition 10.10. *Sei T eine Theorie. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:*

(i) T besitzt QE;

(ii) Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ κ-saturierte Modelle, $\overline{a}_i \in \mathcal{M}_i^{<\omega}$ mit $\overline{a}_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \overline{a}_2$ und $b_1 \in \mathcal{M}_1$.

Dann gibt es $b_2 \in \mathcal{M}_2$ mit $\overline{a}_1 b_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \overline{a}_2 b_2$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\theta : \overline{a}_1 \mapsto \overline{a}_2$. Dies ist ein partieller Isomorphismus, also durch QE ist es partiell elementar. Daher ist (nach Lemma 7.20) $\mathrm{tp}(b_1/\overline{a}_1)^\theta$ ein Typ in $S^{\mathcal{M}_2}(\overline{a}_2)$. Somit ist es nach $\aleph_0$-Saturiertheit von $\mathcal{M}_2$in $\mathcal{M}_2$ realisiert; sei $b_2 \in \mathcal{M}_2$ eine Realisierung. Dann $\overline{a}_1 b_1 \equiv \overline{a}_2 b_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wir verifizieren QE via Satz 5.15(iii).

Seien $\mathcal{A} = \langle \overline{a} \rangle \leq \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ eine gemeinsame Unterstruktur von Modelle von T und $\exists y.\, \psi(\overline{x}, y)$ eine primitiv existentielle Formeln und $b_1 \in \mathcal{M}_1$ mit $\mathcal{M}_1 \models \psi(\overline{a}, b_1)$.

Nach Korollar 10.3 finden wir κ-saturierte elementare Erweiterungen $\mathcal{M}'_i \succeq \mathcal{M}_i$. Durch (ii) gibt es $b_2 \in \mathcal{M}'_2$ mit $\overline{a} b_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \overline{a} b_2$, also $\mathcal{M}_2 \models \exists y.\, \psi(\overline{a}, y)$ wie gewünscht.

□

Beispiel 10.11. Ein *geordneter $\mathbb{Q}$-Vektorraum* ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit einer linearen Ordnung $<$, sodass

$$\forall x, y, z.\, (x < y \to x + z < y + z).$$

Sei $T_{\mathrm{g}\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}$ die $\{0, +, (q\cdot)_{q \in \mathbb{Q}}, <\}$-Theorie, die aus dies Axiom und eine Axiomatisierung für nicht-triviale $\mathbb{Q}$-Vektorräume besteht.

Behauptung. $T_{g\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}$ besitzt QE und ist vollständig.

Beweis. Vollständigkeit folgt aus QE via Korollar 5.16, weil $\langle \emptyset \rangle^{\mathcal{M}} = \{0\}$ für jedes $\mathcal{M} \models T_{\mathrm{g}\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}$.

Sei $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T_{\mathrm{g}\mathbb{Q}-\mathrm{VR}}$ $\aleph_1$-saturiert. Sei $\overline{a}_i \in \mathcal{M}_i^{<\omega}$ mit $\overline{a}_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \overline{a}_2$. Sei $b_1 \in \mathcal{M}_1$.

Jeder qf-Typ $\mathrm{qftp}(b/\overline{a})$ ist durch die Formeln von Form $x = \sum q_i \cdot a_i$ oder $x < \sum q_i \cdot a_i$ oder $x > \sum q_i \cdot a_i$ bestimmt.

Sei $\mathcal{A}_i := \langle \overline{a}_i \rangle^{\mathcal{M}_i}$ Dann erzeugt $\overline{a}_1 \mapsto \overline{a}_2$ einen Isomorphismus $\theta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Beachte, dass das Redukt $\mathcal{M}_i\restriction_<$ von $\mathcal{M}_i$ zu eine Ordnung DLO erfüllt. Daher durch QE für DLO ist θ eine partiell elementare Abbildung von lineare Ordnungen $\theta : \mathcal{M}_1\restriction_< \dashrightarrow \mathcal{M}_2\restriction_<$, also ist $(\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_1\restriction_<}(b_1/\mathcal{A}_1))^\theta$ ein Typ in $S_1^{\mathcal{M}_2\restriction_<}(\mathcal{A}_2)$. Durch $\aleph_1$-Saturiertheit von $\mathcal{M}_2$ sei $b_2 \in \mathcal{M}_2$ eine Realisierung von dies Typ.

Dann $\overline{a}_1 b_1 \equiv^{\mathrm{qf}} \overline{a}_2 b_2$. □

Eine Folgerung ist, dass die $\{0, +, <\}$-Theorie DOAG von linear geordnete teilbare abelesche Gruppen (Z.B. $(\mathbb{Q}; 0, +, <)$) vollständig ist und QE besitzt.

10.4 Bonus: Monsters

Definition 10.12. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt **stark κ-homogen**, wenn jede partiell elementare Abbildung $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ mit $|\mathrm{dom}\,\theta| < \kappa$ zu einen Automorphismus von $\mathcal{M}$ sich erweitern lässt.

$\mathcal{M}$ heißt **stark κ-saturiert**, wenn es κ-saturiert und stark κ-homogen ist.

Proposition 10.13. *Wenn eine Struktur $\mathcal{M}$ saturiert ist, ist es stark $|\mathcal{M}|$-saturiert.*

Beweis. As in ÜA 7.2(a).

Briefly: If $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ is partial elementary and $|\mathrm{dom}\,\theta| < |\mathcal{M}|$, then θ induces an elementary equivalence between the expansions by constants $\mathcal{M}_{\mathrm{dom}\,\theta} \equiv \mathcal{M}_{\mathrm{im}\,\theta}$; but these structures are also saturated, so by Lemma 7.21 they are isomorphic. An isomorphism between these structures is an automorphism of $\mathcal{M}$ extending θ. $\square$

Theorem 10.14. *Sei T eine Theorie mit unendlichen Modelle. Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. Dann besitzt T ein stark λ-saturiertes Modell.*

Beweis. Increasing λ, we may assume $\lambda \geq |T|$ and λ is regular.

Let $\mathcal{M}_0 \vDash T$ with $|\mathcal{M}_0| > \lambda$. By Korollar 10.3 we may extend to an elementary chain $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ such that each $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ is $|\mathcal{M}_\alpha|^+$-saturated, and for η a limit ordinal $\mathcal{M}_\eta = \bigcup_{\alpha<\eta} \mathcal{M}_\alpha$.

Let $\mathcal{M} := \bigcup_{\alpha\in\lambda} \mathcal{M}_\alpha$. Then $\mathcal{M}$ is λ-saturated since each $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ is and λ is regular.

Now let $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ be partial elementary with $|\mathrm{dom}\,\theta| < \lambda$. Since λ is regular, for some $\alpha \in \lambda$ we have $\theta : \mathcal{M}_\alpha \dashrightarrow \mathcal{M}_\alpha$, i.e. $\mathrm{dom}\,\theta \cup \mathrm{im}\,\theta \subseteq \mathcal{M}_\alpha$. Let $\theta_\alpha := \theta$.

Now $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ is $|\mathcal{M}_\alpha|$-saturated, so as in the proof of Lemma 7.23, θ_α extends to a partial elementary map $\theta_{\alpha+1} : M_{\alpha+1} \dashrightarrow M_{\alpha+1}$ with $M_\alpha \subseteq \mathrm{dom}\,\theta_{\alpha+1}$ and also $M_\alpha \subseteq \mathrm{im}\,\theta_{\alpha+1}$.

We obtain in this way, taking unions at limit ordinals, an increasing chain $(\theta_\beta)_{\alpha\leq\beta\in\lambda}$ of partial elementary maps $\theta_\beta : \mathcal{M}_\beta \dashrightarrow \mathcal{M}_\beta$ with each $\mathcal{M}_\beta \subseteq \mathrm{dom}\,\theta_{\beta+1} \cap \mathrm{im}\,\theta_{\beta+1}$.

Then $\sigma := \bigcup_\beta \theta_\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ as required. $\square$

11 ω-Stabilität

Sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modelle.

Lemma 11.1. *T ist κ-stabil genau dann, wenn für alle $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$ mit $|A| \leq \kappa$ gilt $|S(A)| \leq \kappa$.*

Insbesondere ist T ω-stabil genau dann, wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ schmal für alle $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$ mit $|A| = \aleph_0$ ist.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion, dass für alle n $|S_n(A)| \leq \kappa$. Für $n = 1$ ist dies die Definition von κ-Stabilität.

Nehmen wir an, dass $|S_n(A)| \leq \kappa$.
Sei $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ κ^+-saturiert.
Sei $(\bar{b}_i \in \mathcal{N}^n)_{i\in\kappa}$, sodass $\{\mathrm{tp}(\bar{b}_i/A) : i \in \kappa\} = S_n(A)$.
Sei $\bar{b}c \in \mathcal{N}^{n+1}$.

Dann $\bar{b}c \equiv_A \bar{b}_i c'$ für ein $i \in \kappa$ und ein $c' \in \mathcal{N}$.
Für jedes $i \in \kappa$ gibt es höchstens $|S_1(A \cup \bar{b}_i)| \leq \kappa$ Möglichkeiten für $\mathrm{tp}(c'/\bar{b}_i)$.
Somit gilt $|S_{n+1}(A)| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. □

Definition 11.2. T heißt **total transzendent**, wenn für jedes $\mathcal{M} \models T$ gibt es keinen binären Baum $(\phi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ von Formeln für $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_\mathcal{M})$.

Satz 11.3.

(a) *Wenn T ω-stabil ist, ist T total transzendent.*

(b) *Wenn T total transzendent ist, ist T κ-stabil für alle $\kappa \geq |T|$.*

Korollar 11.4. *Angenommen $|T| = \aleph_0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist ω-stabil;*

(ii) *T ist total transzendent.*

(iii) *T ist κ-stabil für alle $\kappa \geq \aleph_0$.*

Beweis von Satz 11.3.

(a) Nehmen wir an, dass $\mathcal{M} \models T$ und $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_\mathcal{M})$ einen binären Baum von Formeln $(\phi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ besitzt. Weil $|2^{<\omega}| = \aleph_0$, gibt es $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| \leq \aleph_0$, sodass jedes ϕ_s ein $\mathcal{L}(A)$-Formelist, also $(\phi_s)_s$ auch ein binärer Baum von Formeln für $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ ist. Dann nach Lemma 8.20 gilt $|S^\mathcal{M}(A)| = |S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A))| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, also T ist nicht ω-stabil.

(b) (cf. ÜA 6.1(a))

Sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ mit $|A| \leq \kappa$. Für $\phi(x)$ eine $\mathcal{L}(A)$-Formel setze $[\phi(x)] := \{p \in S_1(A) : \phi(x) \in p(x)\}$.

Behauptung. *Wenn $|[\phi(x)]| > \kappa$, gibt es eine $\mathcal{L}(A)$-Formel $\psi(x)$, sodass $|[\phi(x) \wedge \psi(x)]| > \kappa < |[\phi(x) \wedge \neg\psi(x)]|$.*

Beweis. Nenne $p \in S_1(A)$ *klein*, wenn $\exists \psi \in p.\ |[\psi]| \leq \kappa$. Es gibt höchstens $|\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)| \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$ kleine Typen in $S_1(A)$. Daher gibt es verschiedene nicht-kleine Typen $p_1, p_2 \in [\phi(x)]$. Sei $\psi(x) \in p_1(x) \setminus p_2(x)$; dann $\phi(x) \wedge \psi(x) \in p_1(x)$ und $\phi(x) \wedge \neg\psi(x) \in p_2(x)$, also ψ ist wie gewünscht. □

Wenn $|[x \doteq x]| = |S_1(A)| > \kappa$, konstruieren wir einen binären Baum mit $|[\phi_s]| > \kappa$ für alle $s \in 2^{<\omega}$: setze $\phi_\emptyset := x \doteq x$; sei ϕ_s konstruiert und setze $\phi_{s0} := \phi_s \wedge \psi$ und $\phi_{s1} := \phi_s \wedge \neg\psi$, wobei ψ wie in die Behauptung ist.

□

11.1 Konstruierbarkeit

Notation 11.5. Seien $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ und $\mathcal{N} \models T$. Wir nennen eine Abbildung $\theta : A \to \mathcal{N}$ *partiell elementar* (*p.e.*) und schreiben $\theta : A \xrightarrow{\equiv} \mathcal{N}$, wenn die entsprechend partielle Abbildung $\theta : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{N}$ p.e. ist.

Bemerkung 11.6. $\theta : A \to \mathcal{N} \models T$ p.e. ist gdw $\mathcal{N}_{A,\theta} \equiv \mathcal{M}_A$, wobei $\mathcal{N}_{A,\theta}$ die $\mathcal{L}(A)$-Struktur definiert durch $a^{\mathcal{N}_{\theta(A)}} := \theta(a)$ ist.

Definition 11.7. Seien $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann ist $\mathcal{M}$ **prim über** A, wenn jede p.e. Abbildung $A \xrightarrow{\equiv} \mathcal{N} \vDash T$ sich zu einer elementaren Einbettung $\mathcal{M} \xhookrightarrow{\preceq} \mathcal{N}$ erweitern lässt.

Bemerkung 11.8. Seien $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Durch Bemerkung 11.6 finden wir, dass $\mathcal{M}$ prim über A genau dann ist, wenn $\mathcal{M}_A$ ein Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ ist.

Bemerkung 11.9. Nach Proposition 8.23 und Proposition 8.15 besitzt jede abzählbare ω-stabil Theorie ein eindeutig bestimmtes Primmodell über jede *abzählbare* Menge $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$.

Tatsächlich gilt dies auch für überabzählbares A. Wir beweisen herunter Existenz. Eindeutigkeit braucht mehr Arbeit.

Definition 11.10. Seien $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann heißt B **konstruierbar** über A, wenn B als $(b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ für eine Ordinalzahl γ aufgezählt werden kann, sodass für alle $\alpha < \gamma$ der Typ $\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup b_{<\alpha})$ isoliert ist, wobei $b_{<\alpha} := \{b_\beta : \beta < \alpha\}$.

Lemma 11.11. *Sei $\mathcal{M} \vDash T$ konstruierbar über $A \subseteq \mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}$ prim über A.*

Beweis. Sei $\theta_0 : A \xrightarrow{\equiv} \mathcal{N} \vDash T$. Wir konstruieren eine Kette von p.e. Abbildungen $\theta_\alpha : A \cup b_{<\alpha} \xrightarrow{\equiv} \mathcal{N} \vDash T$ für $\alpha \leq \gamma$. Dann ist $\theta_\gamma : \mathcal{M} \xhookrightarrow{\preceq} \mathcal{N}$ eine elementare Einbettung ist.

Für $\eta \in \gamma$ eine Limeszahl setze $\theta_\eta := \bigcup_{\alpha\in\eta} \theta_\alpha$.

Sei $\alpha < \gamma$ und sei θ_α konstruiert. Dann setze $\theta_{\alpha+1}(b_\alpha)$ auf eine Realisierung in $\mathcal{N}$ des isolierten Typs $\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup b_{<\alpha})^{\theta_\alpha}$. □

Lemma 11.12. *Angenommen, dass T total transzendent ist. Sei $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann sind die isolierte Typen dicht in $S(A)$.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 8.22(i). □

Satz 11.13. *Angenommen, dass T total transzendent ist. Sei $A \subseteq \mathcal{N} \vDash T$. Dann hat T ein konstruierbares Primmodell $A \subseteq \mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ über A.*

Beweis. Eine *Konstruktion* über A ist eine Reihenfolge $(b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$, in dem jeder Typ $\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup b_{<\alpha})$ isoliert ist.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale Konstruktion $(b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ in $\mathcal{N}$. Sei $M := b_{\leq\gamma} \subseteq \mathcal{N}$. Wir zeigen mit dem Tarski-Test, dass M die Grundmenge einer elementaren Unterstruktur $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, die konstruierbar über A also (nach Lemma 11.11) prim über A ist, ist, wie gewünscht.

Sei $\phi(x)$ eine $\mathcal{L}(B)$-Formel, sodass $\mathcal{N} \vDash \exists y.\phi(x)$. Nach Lemma 11.12 sei $p(x) \in S(B)$ isoliert mit $p(x) \vdash \phi(x)$. Sei $c \in \mathcal{N}$ eine Realisierung von p. Wenn $c \notin B$ könnten wir die Konstruktion mit $b_\gamma := c$ verlängern, was Maximalität widerspricht. Somit gilt $c \in B$ und $\mathcal{N} \vDash \phi(c)$, wie gewünscht. □

Lemma 11.14. *Sei $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Angenommen, dass C konstruierbar über B und B konstruierbar über A sind. Dann ist C konstruierbar über A.*

Beweis. ÜA. □

Definition. Seien $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann heißt B **atomar über** A , wenn $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ isoliert für alle $\bar{b} \in \mathcal{B}^{<\omega}$ ist.

Lemma 11.15. *Sei $\mathcal{M} \models T$ konstruierbar über $A \subseteq \mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}$ atomar über A.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} = (b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ mit $\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup b_{<\alpha})$ isoliert. Sei $\overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Durch eine Permutation nehmen wir an, dass $\overline{b} = b_\alpha \overline{b}'$, wobei $\overline{b}' \in b_{<\alpha}^{<\omega}$. Induktiv können wir annehmen, dass $b_{<\alpha}$ atomar über A ist.

Nun ist $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha/A \cup b_{<\alpha})$ durch eine $\mathcal{L}(A \cup \overline{c})$-Formel isoliert, wobei $\overline{c} \in b_{<\alpha}^{<\omega}$. Dann ist $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha/A \cup \overline{b}\overline{c})$ isoliert. Nach Atomizität ist $\mathrm{tp}(\overline{b}'\overline{c}/A)$ isoliert. Dann sind nach Lemma 8.12 (für $\mathcal{M}_A$) $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha \overline{b}' \overline{c}/A)$ und also $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha \overline{b}'/A)$ isoliert. □

Fakt. *Die Umkehrung gilt für abzählbare $\mathcal{M}$: Wenn $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ und $\mathcal{M}$ abzählbare ist, impliziert wie in Lemma 8.13 Atomizität von $\mathcal{M}$ über A Konstruierbarkeit und also Primheit von $\mathcal{M}$ über A.*

Aber impliziert nicht für überabzählbares $\mathcal{M}$ Atomizität über A Primheit über A, auch wenn T ω-stabil ist und $|A| = |\mathcal{M}|$.

12 Streng Minimalität

Sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modelle.

12.1 Algebraizität

Notation 12.1. Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
\overline{x} \doteq \overline{y} &:= \bigwedge_i x_i \doteq y_i \\
\exists^{\geq n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}) &:= \exists \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n.\ (\bigwedge_i \phi(\overline{x}_i) \wedge \bigwedge_{i<j} \overline{x}_i \neq \overline{x}_j) \\
\exists^{\leq n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}) &:= \neg\exists^{\geq n+1}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}) \\
\exists^{=n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}) &:= (\exists^{\geq n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}) \wedge \exists^{\leq n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x})).
\end{aligned}$$

Definition 12.2. Sei $\mathcal{M} \models T$.

- Eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$ heißt **algebraisch** wenn $|\phi(\mathcal{M})| < \aleph_0$.
- Ein Tupel $\overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ heißt **algebraisch über** eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ heißt ein **algebraisch Typ**, wenn $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ eine algebraische Formel enthält.
- Die **algebraisch Abschluss** von eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$ ist

$$\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) := \{b \in \mathcal{M} : \mathrm{tp}(b/A) \text{ ist algebraisch}\}.$$

Lemma 12.3. *(i) Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Sei $\mathcal{M} \models T$. Für $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ hängt es nur von $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ ab, ob $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ algebraisch ist.*

(ii) Sei $A \subseteq \mathcal{M} \preceq \mathcal{N} \models T$. Dann $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathcal{N}}(A)$. Wir schreiben gewöhnlich nur $\mathrm{acl}(A)$.

Beweis. (i) $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ ist algebraisch genau dann, wenn für ein $n \in \omega$

$$\mathcal{M} \models \exists^{=n}\overline{x}.\ \phi(\overline{x}, \overline{a}).$$

(ii) Sei $\phi(x)$ eine algebraische $\mathcal{L}(A)$-Formel. Sei $n := |\phi(\mathcal{N})|$. Dann $\mathcal{M} \models \exists^{=n} x.\, \phi(x)$, also $\phi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N})$.

Dann $\mathrm{acl}^{\mathcal{N}}(A) = \bigcup_{\phi \text{ alg. } \mathcal{L}(A)\text{-Formel}} \phi(\mathcal{N}) = \bigcup_{\phi \text{ alg. } \mathcal{L}(A)\text{-Formel}} \phi(\mathcal{M}) = \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$.

□

Beispiele 12.4. In einem k-Vektorraum gilt $\mathrm{acl}(A) = \langle A \rangle_k$.

In einem algebraischen abgeschlossenen Körper ist acl körperlicher algebraischer Abschluss: für $A \subseteq K \models \mathrm{ACF}$sei $k = \mathbb{Q}(A) \leq K$ der durch A erzeugter Unterkörper; Dann

$$\mathrm{acl}(A) = \{b \in K : \exists f \in k[X].\, f(b) = 0\}.$$

Lemma 12.5. *(i) Jeder algebraischer Typ ist durch eine algebraische Formel isoliert.*

(ii) Seien $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. Dann ist $\mathrm{acl}(A)$ *über A konstruierbar.*

Beweis. (i) (ÜA 5.3) Sei $\phi(x) \in \mathrm{tp}(b/A)$ algebraisch mit $|\phi(\mathcal{M})|$ minimal. Dann ist $\phi(x)$ isoliert.

(ii) Zähle $\mathrm{acl}(A)$ als $(b_\alpha)_{\alpha \in \gamma}$ auf. Dann ist $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha / A b_{<\alpha})$ algebraisch weil $\mathrm{tp}(\overline{b}_\alpha / A)$ ist, also isoliert nach (i).

□

Lemma 12.6. *Seien $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. Dann* $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

Beweis. Sei $c \in \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$. Sei $\mathcal{M} \models \phi(c, \overline{b})$, wobei $\overline{b} \in \mathrm{acl}(A)^{<\omega}$ und $\phi(x, \overline{y})$ eine algebraische $\mathcal{L}$-Formel ist. Dann ist $\overline{b}$ über A algebraisch weil jede b_i ist. Sei somit $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ eine algebraische $\mathcal{L}(A)$-Formel, die $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ isoliert.

Dann ist $\theta(x) := \exists \overline{y}.\, (\psi(\overline{y}) \wedge \phi(x, \overline{y})) \in \mathrm{tp}(c/A)$ algebraisch; In der Tat: $\theta(\mathcal{M}) = \bigcup_{\overline{b}' \in \psi(\mathcal{M})} \phi(\mathcal{M}, \overline{b}')$ ist endlich, weil: Für jedes von den endlich vielen $\overline{b}' \in \psi(\mathcal{M})$ gilt $\overline{b}' \equiv \overline{b}$ und also ist $\phi(\mathcal{M}, \overline{b}')$ endlich. □

12.2 Minimale und streng minimale Formeln

Definition 12.7. Sei $\mathcal{M} \models T$.

- Eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$ heißt **minimal in** $\mathcal{M}$, wenn $\phi(\overline{x})$ nicht algebraisch ist aber für jede $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\psi(\overline{x})$ entweder $\phi(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})$ oder $\phi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x})$ algebraisch ist.

- Eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$ heißt **streng minimal** wenn es in jedes $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ minimal ist.

Beispiel 12.8. Sei $\mathcal{M} := (\{(i,j) : i < j < \omega\}; E)$, wobei $(i,j)E(i',j')$ gdw $j = j'$. Dann ist $x \doteq x$ minimal in $\mathcal{M}$. (Für dies beachte, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ QE besitzt, wenn wir für jedes $n \in \omega$ eine Prädikat für $\{(i,j) : j > n\}$ hinzufugen.)

Aber $x \doteq x$ ist nicht streng minimal. In der Tat: Sei $b \in \mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ eine Realisierung vom partiellen Typ $\{\exists^{\geq n} y.\, yEx : n \in \omega\}$; Dann ist weder xEb noch $\neg xEb$ algebraisch.

Lemma 12.9. *Sei $\phi(\overline{x},\overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Sei $\mathcal{M} \vDash T$. Für $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ ist $\phi(\overline{x},\overline{a})$ streng minimal genau dann, wenn es nicht algebraisch ist und für jede $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\overline{x},\overline{y})$ es $n_\psi \in \omega$ gibt, sodass*

$$\mathcal{M} \vDash \forall \overline{y}.\ \exists^{\leq n_\psi}\overline{x}.\ (\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x},\overline{y})) \vee \forall \overline{y}.\ \exists^{\leq n_\psi}\overline{x}.\ (\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x},\overline{y})).$$

Insbesondere hängt streng Minimalität von $\phi(\overline{x},\overline{a})$ nur von $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ ab.

Beweis. $\Leftarrow$ Sofort.

$\Rightarrow$ Angenommen, es gibt kein solches n_ψ. Dann ist

$$\pi(\overline{y}) := \{\exists^{\geq n}\overline{x}.\ (\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x},\overline{y})) \wedge \exists^{\geq n}\overline{x}.\ (\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x},\overline{y})) : n \in \omega\}$$

ein partieller Typ. Sei somit $\overline{b} \in \mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ eine Realisierung von $\pi(\overline{y})$. Dann ist weder $\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x},\overline{b})$ noch $\phi(\overline{x},\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x},\overline{b})$ algebraisch, also $\phi(\overline{x},\overline{a})$ ist nicht in $\mathcal{N}$ minimal, was streng Minimalität widerspricht.

□

Definition 12.10.
- T heißt **streng minimal**, wenn $x \doteq x$ streng minimal ist; D.h. jede definierbare Teilmenge von jedes $\mathcal{M} \vDash T$ endweder endlich oder koendlich ist. ($X \subseteq Y$ heißt *koendlich*, wenn $Y \setminus X$ endlich ist.)
- Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt **streng minimal**, wenn $\mathcal{M}$ unendlich ist und $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ streng minimal ist.

Beispiel. T_∞, $\mathrm{Th}((\mathbb{Z};S))$, $T_{k-\mathrm{VR}}$ und die Vervollständigungen von ACF sind alle streng minimal.

12.3 Existenz von (streng) minimale Formeln in ω-stabil Theorien

Lemma 12.11. *Angenommen, T ist total transzendent. Sei $\mathcal{M} \vDash T$. Sei $|\overline{x}| > 0$. Dann gibt es eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$, die in $\mathcal{M}$ minimal ist.*

Beweis. Sonst: wenn $\phi_s(\overline{x})$ eine nicht-algebraisch $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel ist, gibt es eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\psi(\overline{x})$, sodass $\phi_{s0} := \phi_s(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})$ und $\phi_{s1} := \phi_s(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x})$ nicht-algebraische $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln sind. Wir konstruieren somit einen binären Baum $(\phi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$, was total Transzendenz widerspricht. □

Lemma 12.12. *Sei $\mathcal{M} \vDash T$ $\aleph_0$-saturiert. Sei $\phi(\overline{x})$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel, die minimal in $\mathcal{M}$ ist. Dann ist $\phi(\overline{x})$ streng minimal.*

Beweis. Sonst ist der Typ im Beweis von Lemma 12.9 durch $\aleph_0$-saturierheit in $\mathcal{M}$ realisiert, was Minimalität widerspricht. □

Definition 12.13. T **eliminiert** $\exists^\infty$, wenn für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\overline{x},\overline{y})$ es $n_\phi \in \omega$ gibt, sodass für alle $\mathcal{M} \vDash T$ und $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ gilt

$$|\phi(\mathcal{M},\overline{b})| < \aleph_0 \Rightarrow |\phi(\mathcal{M},\overline{b})| \leq n_\phi.$$

(Dann ist "$\exists^\infty\overline{x}.\ \phi(\overline{x},\overline{y})$" durch $\exists^{>n_\phi}\overline{x}.\ \phi(\overline{x},\overline{y})$ ausgedrückt.)

Lemma 12.14. *Wenn T $\exists^\infty$ eliminiert, ist jede minimale Formel ϕ streng minimal.*

Beweis. Lemma 12.9. □

Korollar 12.15. *Sei $|\overline{x}| > 0$. Angenommen, T ist total transzendent. Für jedes $\aleph_0$-saturiert $\mathcal{M} \vDash T$ gibt es eine streng minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$.*

Angenommen auch, T eliminiert $\exists^\infty$. Für jedes $\mathcal{M} \vDash T$ gibt es eine streng minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$.

12.4 Streng Minimalität und Stabilität

Sei $\phi(\overline{x})$ eine streng minimale $\mathcal{L}$-Formel. Nach Lemma 12.9 bedeutet dies genau, dass $\phi(\overline{x})$ minimal in jedes $\mathcal{M} \vDash T$ ist.

Lemma 12.16. *Sei $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$.*

(i) Es gibt einen eindeutig bestimmten nicht-algebraischen Typ $\mathfrak{p}_A(\overline{x}) \in S(A)$ mit $\phi(\overline{x}) \in \mathfrak{p}_A(\overline{x})$. Dieser Typ $\mathfrak{p}_A(\overline{x})$ ist der **generischer** *Typ von ϕ über A.*

(ii) Für jedes $n \in \omega$ gibt es einen eindeutig bestimmten Typ $\mathfrak{p}_A^{(n)}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ von eine Folge $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in \phi(\mathcal{M})$ mit $\overline{a}_i \notin \operatorname{acl}(A \cup \overline{a}_{<i})^{<\omega}$ für $1 \leq i \leq n$. Eine solche Folge ist auch genannt **generisch** *über A.*

Beweis. (i) Eine nicht-algebraischer Typ existiert, weil

$$\{\phi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x}) : \psi(\overline{x}) \text{ eine algebraische } \mathcal{L}(A)\text{-Formel}\}$$

endlich konsistent ist, weil ϕ nicht algebraisch ist.

Wenn zwei verschiedene solche Typen existieren, trennt sie eine $\mathcal{L}(A)$-Formel ψ , also weder $\phi \wedge \psi$ noch $\phi \wedge \neg\psi$ algebraisch ist, was Minimalität von ϕ in $\mathcal{M}$ widerspricht.

(ii) Nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass dies gilt für $n \in \omega$. Betrachte zwei solche Folgen $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n+1}$ und $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_{n+1}$. Dann

$$(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \equiv (\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n),$$

also gibt es $\overline{c} \in \phi(\mathcal{N})$ für eines $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$, sodass

$$(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}) \equiv_A (\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n, \overline{c})$$

(Nämlich eine Realisierung von $\operatorname{tp}(\overline{a}_{n+1}/\overline{a}_{<n+1})^{\mathrm{id}_A \cup \bigcup_i \overline{a}_i \mapsto \overline{b}_i}$).

Dann $\overline{c}, \overline{b}_{n+1} \vDash \mathfrak{p}_{A \cup \overline{b}_{<n+1}}$, also

$$(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n+1}) \equiv_A (\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n, \overline{c}) \equiv_A (\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_{n+1}).$$

□

Lemma 12.17. *Abzählbare streng minimale Theorien sind ω-stabil.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$ mit $|A| \leq \aleph_0$. Nach Lemma 12.16 für die streng minimale Formel $x \doteq x$: wenn $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ und $b \in \mathcal{N} \setminus \operatorname{acl}(A)$, gilt $b \vDash \mathfrak{p}_A(x)$. Somit $|S_1(A)| \leq |\operatorname{acl}(A)| + 1 \leq |T| + |A| = \aleph_0$. □

Bemerkung 12.18. Tatsächlich ist jede streng minimale Theorie total transzendent.

Lemma 12.19. *Sei* $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. *Wenn* $(\overline{a}, \overline{b}) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$, *gilt* $(\overline{b}, \overline{a}) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für *eines* Paar $(\overline{a}, \overline{b}) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$ $(\overline{b}, \overline{a}) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$ gilt.

Seien $\overline{a}_i \models \mathfrak{p}_A$ für $i \in \omega$ verschiedene Realisierungenund sei $\overline{b} \models \mathfrak{p}_{A \cup \bigcup_i \overline{a}_i}$, alle in eines $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ realisiert.

Dann $(\overline{a}_i, \overline{b}) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$ für alle $i \in \omega$, also $\overline{a}_i \equiv_{A \cup \{\overline{b}\}} \overline{a}_j$ für alle $i, j \in \omega$. Es folgt, dass $\overline{a}_0 \notin \mathrm{acl}(A \cup \{\overline{b}\})^{<\omega}$, also $(\overline{b}, \overline{a}_0) \models \mathfrak{p}_A^{(2)}$. □

12.5 Prägeometrien

Definition 12.20. Eines Paar (S, cl), wobei Seine Menge ist und $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, ist eine **Prägeometrie**, wenn für $A, B \subseteq S$ und $b, c \in S$:

(PG1) $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$

(PG2) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

(PG3) $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{A_0 \subseteq_{\mathrm{end}} A} \mathrm{cl}(A_0)$

(PG4) "Austausch": Wenn $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{c\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$, gilt $c \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\})$.

Bemerkung. Eine endliche Prägeometrie ist auch genannt ein *Matroid.*

Sei $\phi(\overline{x})$ eine streng minimale $\mathcal{L}$-Formel.

Lemma 12.21. *Sei* $\mathcal{M} \models T$. *Definiere* $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}} \restriction_{\phi(\mathcal{M})}$: $\mathcal{P}(\phi(\mathcal{M})) \to \mathcal{P}(\phi(\mathcal{M}))$ *durch* $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}} \restriction_{\phi(\mathcal{M})} (A) := \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) \cap \phi(\mathcal{M})$. *Dann ist* $(\phi(\mathcal{M}), \mathrm{acl}^{\mathcal{M}} \restriction_{\phi(\mathcal{M})})$ *eine Prägeometrie.*

Wenn es kann keine Ambiguität verursachen, schreiben wir nur acl *oder* $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}$ *für* $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}} \restriction_{\phi(\mathcal{M})}$.

Beweis.

(PG1) Clear.

(PG2) Lemma 12.6.

(PG3) An algebraic formula uses only finitely many parameters.

(PG4) Lemma 12.19.

□

Definition 12.22. Sei (S, cl) eine Prägeometrie. Eine Teilmenge $A \subseteq S$ ist cl-**unabhängig**, wenn $a \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a\})$ für alle $a \in A$. Eine cl-**Basis** für S ist eine maximale cl-unabhängig Teilmenge.

Lemma 12.23. *Sei* (S, cl) *eine Prägeometrie.*

(i) S *besitzt eine Basis.*

(ii) Wenn $B \subseteq S$ *eine Basis ist, gilt* $\mathrm{cl}(B) = S$.

Beweis. (i) Nach (PG3) ist die Vereinigung eine Kette von unabhängige Teilmenge unabhängig. Die Behauptung folgt aus Das Zornschen Lemma.

(ii) Sei $c \in S \setminus \mathrm{cl}(B)$. Für jede $b \in B$ gilt $b \notin \mathrm{cl}(B \setminus \{b\})$ Dann gilt nach (PG4) $b \notin \mathrm{cl}(B \setminus \{b\}) \cup \{c\}$. Aber dann ist $B \cup \{c\}$ unabhängig, was Maximalität widerspricht.

□

Proposition 12.24. *Sei* (S, cl) *eine Prägeometrie. Dann besitzen alle Basen die gleich Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit ist die* **Dimension** $\dim((S, \mathrm{cl}))$ *der Prägeometrie.*

Beweis. Sei $X, Y \subseteq S$ mit $\mathrm{cl}(X) = S$ und Y unabhängig. Wir zeigen, dass $|Y| \leq |X|$.

Zuerst beweisen wir dies, wenn X endlich ist. Sei $n = |X| \geq 0$. Angenommen, die Behauptung gilt für $|X| = n - 1$. Aufzähle X als $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wenn $Y = \emptyset$, sind wir fertig. Sonst sei $y \in Y$. Dann gilt durch Unabhängigkeit $y \notin \mathrm{cl}(\emptyset)$. Außerdem $y \in \mathrm{cl}(X)$. Somit sei $i \geq 1$, sodass $y \in \mathrm{cl}(x_{\leq i}) \setminus cl(x_{<i})$. Dann gilt nach (PG4) $x_i \in \mathrm{cl}(\{x_1, \ldots, x_{i-1}, y\})$.

Betrachte nun die Prägeometrie (S, cl_y), wobei $\mathrm{cl}_y(A) := \mathrm{cl}(A \cup \{y\})$. Dann $\mathrm{cl}_y(\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}) = S$, und $Y \setminus \{y\}$ ist cl_y-unabhängig, also durch die Induktionsvoraussetzung gilt

$$|Y| - 1 = |Y \setminus \{y\}| \leq |X \setminus \{x_i\}| = |X| - 1,$$

also $|Y| \leq |X|$, wie gewünscht.

Sei nun $|X| \geq \aleph_0$. Für $X_0 \subseteq_{\mathrm{end}} X$ nach dem endlichen Fall vorher (auf $(\mathrm{cl}(X_0), \mathrm{cl}\restriction_{\mathrm{cl}(X_0)})$ angewendet) gilt $|Y \cap \mathrm{cl}(X_0)| \leq |X_0| < \aleph_0$. Nun gilt nach (PG3) $Y = \bigcup_{X_0 \subseteq_{\mathrm{end}} X} (Y \cap \mathrm{cl}(X_0))$. Weil $|\{X_0 : X_0 \subseteq_{\mathrm{end}} X\}| = |X|$, gilt $|Y| \leq |X|$. □

Definition 12.25. Für $\mathcal{M} \vDash T$, setze $\dim^{\phi}(\mathcal{M}) := \dim((\phi(\mathcal{M}), \mathrm{acl}))$.

Wenn T streng minimal ist, setze $\dim(\mathcal{M}) := \dim^{x \dot{=} x}(\mathcal{M})$.

Bemerkung 12.26. Die acl-Dimension eines algebraischen abgeschlossenen Körpers ist auch genannt als seinen "Transzendenzgrad".

Lemma 12.27. *(i) Die unabhängige Teilmengen der Mächtigkeit* n *in* $(\phi(\mathcal{M}), \mathrm{acl})$ *sind genau die Realisierungen von* $\mathfrak{p}_{\emptyset}^{(n)}$.

(ii) Allgemeiner ist $A \subseteq \phi(\mathcal{M})$ *unabhängig genau dann, wenn für jedes* $n \in \omega$ *jedes Tupel von* n *verschiedene Elementen von* A *den Typ* $\mathfrak{p}_{\emptyset}^{(n)}$ *realisiert.*

Insbesondere, wenn $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \vDash T$ *und* $A_i \subseteq \phi(\mathcal{M}_i)$ *unabhängige Teilmengen mit* $|A_1| = |A_2|$ *sind, ist jede Bijektion* $\theta : A_1 \to A_2$ *partiel elementar.*

Beweis. (i) Sei $\mathcal{M} \vDash T$ $\aleph_0$-saturiert und sei B eine acl-Basis für $\phi(\mathcal{M})$. Dann ist B unendlich. Sei $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\} \subseteq B$ eine Teilmenge der Mächtigkeit n. Dann $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \vDash \mathfrak{p}_{\emptyset}^{(n)}$ und $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\}$ unabhängig ist, also dies gilt auch für jede Realisierung von $\mathfrak{p}_{\emptyset}^{(n)}$.

(ii) Folgt aus (i).

□

12.6 Minimale Teilmengen

Der folgender Begriff von Minimalität einer Teilmenge ist deutlich getrennt vom Begriff von Minimalität einer Formel.

Definition 12.28. Seien $A \subseteq B \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann heißt B **minimal über** A (in $\mathcal{M}$), wenn für jedes $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ mit $A \subseteq \mathcal{N}$ auch $B \subseteq \mathcal{N}$ gilt.

Lemma 12.29. *Sei $A \subseteq B \subseteq \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Dann ist B konstruierbar und minimal über A in $\mathcal{M}$.*

Beweis. Konstruierbarkeit folgt wie in Lemma 12.5. Ad Minimalität: Wenn $A \subseteq \mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$, gilt $B \subseteq \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathcal{N}}(A) \subseteq \mathcal{N}$ (nach Lemma 12.3(ii)). □

Lemma 12.30. *Seien $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$ und $A' \subseteq \mathcal{M}' \vDash T$. Sei $\mathcal{M}$ konstruierbar über A und $\mathcal{M}'$ minimal über A'. Sei $\theta : A \xrightarrow{\equiv} A'$ eine p.e. Bijektion. Dann lässt θ sich zu einem Isomorphismus $\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}'$ erweitern.*

Beweis. Nach Lemma 11.11 ist $\mathcal{M}$ prim über A, also θ lässt sich zu einer elementaren Einbettung $\theta' : \mathcal{M} \xhookrightarrow{\preceq} \mathcal{M}'$ erweitern. Dann gilt $A' \subseteq \mathrm{im}(\theta') \subseteq \mathcal{M}'$, also nach Minimalität $\mathrm{im}(\theta') = \mathcal{M}'$. □

12.7 Klassifikation der Modelle einer streng minimale Theorie

Angenommen, T ist streng minimal.

Satz 12.31. *Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \vDash T$. Dann*

$$\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2 \ \Leftrightarrow\ \dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_2).$$

Insbesondere ist T κ-kategorisch für alle $\kappa > |T|$.

Beweis. Angenommen, dass $\dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_2)$. Sei B_i eine acl-Basis von $\mathcal{M}_i$. Nach Lemma 12.27(ii) ist jede Bijektion $\theta : B_1 \to B_2$ partiel elementar. Nach Lemma 12.23(ii) $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}_i}(B_i) = \mathcal{M}_i$. Nach Lemma 12.29 und Lemma 12.30 lässt sich θ zu einem Isomorphismus $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_2$ erweitert.

Die Umkehrung ist klar.

Ad "Insbesondere": Es genügt zu beobachten, dass $\dim(\mathcal{M}) \leq |\mathcal{M}| \leq |T| + \dim(\mathcal{M})$ (für alle $\mathcal{M} \vDash T$). □

Lemma 12.32. *(i) Seien $A \subseteq \mathcal{M} \vDash T$. Angenommen, $A = \mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A)$ und $|A| \geq \aleph_0$. Dann ist A die Grundmenge einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{M}$.*

(ii) Für eine Kardinalzahl $0 \leq \lambda \leq \aleph_0$,

$$\{\dim(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \vDash T\} = [\lambda, \infty) = \{\kappa \in \mathrm{Kard} : \lambda \leq \kappa\}.$$

Insbesondere ist eine abzählbare streng minimale Theorie $\aleph_0$-kategorisch genau dann, wenn es kein endlich-dimensionales Modell besitzt.

Beweis. ÜA; (i) ist eine einfache Verwendung vom Tarski-Test, und (ii) folgt aus (i). □

Beispiel 12.33.
- $T_{\mathbb{F}_q-\mathrm{VR}}$ ist κ-kategorisch für alle unendliche κ.
- Für k einen unendlichen Körper besitzt $T_{k-\mathrm{VR}}$ Modelle in Dimensionen $[1, \infty)$.
- ACF_p ($p = 0$ oder p prim) besitzt Modelle in Dimensionen $[0, \infty)$.

12.8 Bauen von überabzählbar kategorische Theorien

Definition 12.34. Eine abzählbare Theorie heißt **überabzählbar kategorisch**, wenn sie κ-kategorisch fur ein $\kappa > \aleph_0$ ist.

Nach Satz 12.31 sind abzählbare streng minimale Theorien überabzählbar kategorisch.

Wir beginnen nun die folgende Fragen zu betrachten:

- In *welche* überabzählbare Kardinalzahlen sind überabzählbar kategorische Theorien kategorisch? Z.B.: kann eine abzählbare Theorie $\aleph_2$-kategorisch aber nicht $\aleph_1$-kategorisch sein, oder umgekehrt?
- Welche Theorien sind überabzählbar kategorisch? Müssen sie streng minimal sein, oder irgendwie zu einer streng minimalen Theorie verbindet?

Beispiel 12.35. Sei X eine unendliche Menge. Sei $\mathrm{Cart}^n(X) := (X^n \dot\cup X; P, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, wobei $P(\mathrm{Cart}^n(X)) := X$ und $\pi_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (und $\pi_i{\restriction}_X := \mathrm{id}{\restriction}_X$).

Sei $T := \mathrm{Th}(\mathrm{Cart}^n(X))$. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die Modelle von T sind genau $\{\mathrm{Cart}^n(Y) : |Y| \geq \aleph_0\}$, also T ist κ-kategorisch für alle $\kappa \geq \aleph_0$.

Nun ist T nicht streng minimal, aber $P(x)$ ist streng minimal. Sei $\mathcal{N} \vDash T$. Dann $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{acl}(P(\mathcal{N}))$, also nach Lemma 12.29 ist $\mathcal{N}$ konstruierbar und minimal über $P(\mathcal{N})$, aus was die Kategorizität folgt (weil jede Bijektion $P(\mathcal{M}_1) \to P(\mathcal{M}_2)$ elementar ist).

Beispiel 12.36. Sei $n \in \omega$. Sei V einer n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $\mathrm{VR}^n(\mathbb{C}) := (V \dot\cup \mathbb{C}; P, +, \cdot, *)$, wobei $P(\mathrm{VR}^n(\mathbb{C})) := \mathbb{C}$ und $+, \cdot$ die Ringoperationen auf $\mathbb{C}$ sind und $*$ Skalarmultiplication $\mathbb{C} \times V \to V$ ist (mit diese Operationen zu totale Funktionen auf $V \dot\cup \mathbb{C}$ gemacht, durch Setzen von den Wert zu $0 \in \mathbb{C}$, wenn es sonst undefiniert wäre).

Sei $T := \mathrm{Th}(\mathrm{VR}^n(\mathbb{C}))$. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die Modelle von T sind genau $\{\mathrm{VR}^n(K) : K \vDash \mathrm{ACF}_0\}$, also T ist κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$.

Nun ist $P(x)$ streng minimal, aber $\mathrm{VR}^n(K) \not\subseteq \mathrm{acl}(K)$. Wenn wir jedoch ein K-basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ für den Vektorraum wahlen, gilt $\mathrm{VR}^n(K) \subseteq \mathrm{acl}(B \cup K)$. Dies genügt für Kategorizität, nach dem folgenden Proposition.

Proposition 12.37. *Sei T eine vollständige abzählbare Theorie.*

Sei $\mathcal{M}_0 \vDash T$ prim. Sei $\phi(x)$ eine streng minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$-Formel. Angenommen, jede elementare Erweiterung $\mathcal{M} \succeq \mathcal{M}_0$ ist konstruierbar und minimal über $\mathcal{M}_0 \cup \phi(\mathcal{M})$.

Dann ist T κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$, und T besitzt $\leq \aleph_0$ abzählbare Modelle bis auf Isomorphie.

Beweis.

Behauptung. *Sei $\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M} \vDash T$. Sei B eine $\mathrm{acl}^{\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0}}$-Basis für $\phi(\mathcal{M})$. Dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0}$ konstruierbar und minimal über B.*

Beweis. Wir haben $B \subseteq \phi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{M}_0}$. Nach Lemma 12.29 ist $\phi(\mathcal{M})$ konstruierbar und minimal über B in $\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0}$. Weil $\mathcal{M}$ konstruierbar und minimal über $\mathcal{M}_0 \cup \phi(\mathcal{M})$ ist, ist $\mathcal{M}_{\mathcal{M}_0}$ auch konstruierbar und minimal über $\phi(\mathcal{M})$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 11.14 und sein (einfach verifiziert) Analagon für Minimalität. □

Sei $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \vDash T$ mit $|\mathcal{M}_i| = \kappa > \aleph_0$; wir zeigen, dass $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$. OE $\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_i$.

$\mathcal{M}_i$ ist konstruierbar also prim über $\phi(\mathcal{M}_i) \cup \mathcal{M}_0$, also nach Löwenheim-Skolem, einbettet $\mathcal{M}_i$ in einem Modell der Mächtigkeit $\aleph_0 + |\phi(\mathcal{M}_i)|$, also $|\phi(\mathcal{M}_i)| = \kappa$.

Nach die Behauptung und Lemma 12.30 lässt eine Bijektion von Basen zu eine Isomorphismus $(\mathcal{M}_1)_{\mathcal{M}_0} \cong (\mathcal{M}_2)_{\mathcal{M}_0}$, Insbesondere $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$, erweitern.

Ad $\kappa = \aleph_0$: die gleich Argumentation zeigt, dass abzählbare Modelle $\mathcal{M}_i$ isomorph sind, wenn $\dim^{\phi}(\mathcal{M}_1) = \dim^{\phi}(\mathcal{M}_2)$; außerdem $\dim^{\phi}(\mathcal{M}_i) \leq \aleph_0$. □

In alle Beispiele von überabzählbar kategorische Theorien, die wir haben gesehen, gelten die Voraussetzungen von Proposition 12.37, wenn wir "konstruierbar und minimal" zu "algebraisch" verstärken. Solche Theorien heißen *fast streng minimal*. Das folgendes Beispiel ist ein natürliches Beispiel einer überabzählbar kategorische Theorie, die nicht fast streng minimal ist.

Beispiel 12.38. $T := \mathrm{Th}((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\omega}; 0, +)$.

ÜA: T besitzt QE und ist durch den folgenden Axiomen axiomatisiert:

$$[\text{Axiome für unendliche abelsche Gruppen}] \cup \{\forall x.(2x = 0 \leftrightarrow \exists y.2y = x)\}.$$

Sei $G \vDash T$. Sei $\lambda := |G|$.

Behauptung. $G \cong \bigoplus_{i<\lambda} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $[2] : G \to G;\ x \mapsto 2x$. Dann $\ker([2]) = \mathrm{im}([2]) = 2G$. Somit ist $2G$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, und $|2G| = |G| = \lambda$.

Sei $(b_i)_{\lambda}$ eine $\mathbb{F}_2$-Basis für $2G$. Sei $e_i \in G$, sodass $2e_i = b_i$. Dann $\mathrm{ord}(e_i) = 4$.

Sei $g \in G$. Sei $2g = b_{i_1} + \ldots + b_{i_m}$. Setze $g' := e_{i_1} + \ldots + e_{i_m}$. Dann $2(g - g') = 0$, also $g - g' \in 2G$. Daher ist G durch $(e_i)_i$ erzeugt.

Sei $\sum_{i=1}^{k} n_{j_i} e_{j_i} = 0$ mit $n_{j_i} \in \mathbb{Z}$. Dann $\sum_{i=1}^{k} n_{j_i} b_{j_i} = 2 \cdot 0 = 0$, also $2 | n_{j_i}$. Dann $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_{j_i}}{2} b_{j_i} = 0$, also $2 | \frac{n_{j_i}}{2}$. Daher $4 | n_{j_i}$.

Wir haben somit, dass $G = \bigoplus_{i<\lambda} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) e_i$. □

Es folgt, dass T κ-kategorisch für alle $\kappa \geq \aleph_0$ ist.

Sei $\phi(x) := \exists y.\, x = y + y$, so $\phi(G) = 2G$. Nach QE ist ϕ streng minimal.

Behauptung. G ist konstruierbar und minimal über $2G$.

Beweis.

Ad Minimalität: Seien $2G \subseteq G' \preceq G$ und $g \in G \setminus 2G$. Dann gilt $2g' = 2g$ für ein $g' \in G'$, aber dann $g' - g \in 2G \subseteq G'$, also $g \in G'$. Dann $G' = G$.

Ad Konstruierbarkeit: Seien $(e_i)_{i \in \lambda}$ wie vorher. Es folgt aus QE, oder durch Betrachten von Automorphismusen und den Beweis von der vorherigen Behauptung, dass für $j \in \lambda$ der Typ $\mathrm{tp}(e_j / 2G \cup \bigoplus_{i<j} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) e_i)$ durch $x + x = b_j$ isoliert

ist, also $2G \cup \bigoplus_{i \leq j}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})e_i$ algebraisch also konstruierbar über $2G \cup \bigoplus_{i<j}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})e_i \cup \{e_j\}$ ist.

Daher bauen wir eine Konstruktion für G über $2G$.

□

13 Ununterscheidbare Folgen

13.1 Ramsey Theorie

Wenn A eine Menge und $n \in \omega$ sind, schreiben wir $[A]^n$ für die Menge von n-Elementen Teilmengen von A:

$$[A]^n := \{A_0 \subseteq A : |A_0| = n\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Satz 13.1 (Unendlicher Ramseysatz)**.** *Sei A eine unendliche Menge. Sei $n \in \omega$ und sei C eine endliche Menge. Sei $f : [A]^n \to C$ eine Abbildung (eine "Farbung" von den n-Elementen Teilmengen). Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $B \subseteq A$, die "f-einfarbig" ist, d.h. sodass f konstant auf $[B]^n$ ist.*

Bemerkung. Mit $n = 2 = |C|$ gibt dies, dass jeder unendliche Graph eine unendliche Clique oder eine unendliche Anticlique besitzt.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist klar. Nehmen wir an, dass $n > 0$ und die Behauptung für $n - 1$ gilt.

Für $a \in A$ definiere $f_a : [A \setminus \{a\}]^{n-1} \to C; f_a(A') := f(A' \cup \{a\})$. Konstruiere rekursiv eine Folge von unendliche Mengen $A =: B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$ und Elemente $a_i \in B_i \setminus B_{i+1}$ und $c_i \in C$ wie folgt: sei B_i konstruiert und sei $a_i \in B_i$ und sei $B_{i+1} \subseteq B_i \setminus a_i$ eine unendliche f_{a_i}-einfarbige Teilmenge, die existiert nach der Induktionsvoraussetzung, weil B_i unendlich ist. Sei c_i, sodass $f_{a_i}([B_{i+1}]^{n-1}) = \{c_i\}$. Nach dem Schubfachprinzip sei $c \in C$, sodass $c_i = c$ für unendlich viele $i \in \omega$, und setze $B := \{a_i : c_i = c\}$.

Dann ist B f-einfarbig. In der Tat: wenn $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\} \subseteq B$ eine Teilmenge mit $i_1 < \ldots < i_n$ ist, gilt $a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in B_{i_1+1}$, also

$$f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}) = f_{a_{i_1}}(\{a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}) = c_{i_1} = c.$$

□

13.2 Ununterscheidbare Folgen

Notation 13.2. Seien I eine lineare Ordnung und $n \in \omega$. Wir schreiben $I^{\overrightarrow{n}}$ für die Menge von *I-geordneten n-Tupeln* von I,

$$I^{\overrightarrow{n}} := \{(i_1, \ldots, i_n) \in I^n : i_1 < \ldots < i_n\}.$$

Wenn $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge ist und $\bar{i} \in I^{\overrightarrow{n}}$, setze $a_{\bar{i}} := (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$.

Definition 13.3. Sei I eine lineare Ordnung. Eine Folge $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen einer Struktur $\mathcal{M}$ heißt **ununterscheidbar**, wenn für jedes $n \in \omega$ und jede $\bar{i}, \bar{j} \in I^{\overrightarrow{n}}$,

$$a_{\bar{i}} \equiv a_{\bar{j}}.$$

In andere Worte: für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und jede $i_1 < \ldots < i_n \in I$ und $j_1 < \ldots < j_n \in I$ gilt

$$\mathcal{M} \vDash \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

Beispiele 13.4.
- Jede konstante Folge, $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i = a \in \mathcal{M}$ für alle i, ist ununterscheidbar.
- Wenn $\phi(x)$ streng minimal in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist und $A \subseteq \phi(\mathcal{M})$ acl-unabhängig ist, gibt Lemma 12.27(ii), dass für jede lineare Ordnung I und jede Injektion $I \to A; i \mapsto a_i$ die Folge $(a_i)_{i \in I}$ ununterscheidbar ist.
- Sei $\mathcal{M} \vDash \mathrm{DLO}$. Nach QE ist jede echt aufsteigende Folge von Elementen $(a_i)_{i \in I}$ ununterscheidbar.

Definition 13.5. Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge von Elementen einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, wobei I eine lineare Ordnung ist.

Der **Ehrenfeucht-Mostowski Typ** (EM-Typ) von $(a_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{M}$ ist

$$\mathrm{EM}((a_i)_i) = \{\phi(\overline{x}) : \phi(\overline{x}) \text{ an } \mathcal{L}\text{-formula; } \forall \overline{i} \in I^{|\overrightarrow{\overline{x}}|}.\ \mathcal{M} \vDash \phi(a_{\overline{i}})\}.$$

Bemerkung 13.6. $(a_i)_{i \in I}$ ist ununterscheidbar genau dann, wenn $\mathrm{EM}((a_i)_i)$ vollständig ist, in dem Sinne, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ entweder ϕ oder $\neg\phi$ in dem EM-Typ ist.

Lemma 13.7. *Seien I und J unendliche lineare Ordnungen. Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge von Elementen einer Struktur $\mathcal{M}$.*

Dann gibt es $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und eine ununterscheidbare Folge $(b_j)_{j \in J}$ von Elementen von $\mathcal{M}'$, sodass $\mathrm{EM}((a_i)_{i \in I}) \subseteq \mathrm{EM}((b_j)_{j \in J})$.

Beweis. Sei $(c_j)_{j \in J}$ neue Konstante. Es genügt zu zeigen die Konsistenz von

$$T := \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \cup \{\psi(c_{\overline{j}}) : \psi(\overline{x}) \in \mathrm{EM}((a_i)_i);\ \overline{j} \in J^{|\overrightarrow{\overline{x}}|}\}$$
$$\cup \{\phi(c_{\overline{j}}) \leftrightarrow \phi(c_{\overline{j}'}) : \phi(\overline{x}) \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel; } \overline{j}, \overline{j}' \in J^{|\overrightarrow{\overline{x}}|}\}.$$

Sei $T_0 \subseteq_{\mathrm{end}} T$ endlich. Nach Kompaktheit genügt es zu zeigen Konsistenz von T_0. Sei n die maximale Anzahl von freie Variablen in den Formeln ϕ in die $(\phi(c_{\overline{j}}) \leftrightarrow \phi(c_{\overline{j}'}))$, die in T_0 vorkommen; also wir können jede diese ϕ als $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben. Sei Δ die endlich Menge von diesen $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Definiere $f : I^{\overrightarrow{n}} \to 2^{\Delta}$ durch

$$f(\overline{i}) := \left(\phi \mapsto \begin{cases} 1 & \mathcal{M} \vDash \phi(a_{\overline{i}}) \\ 0 & \mathcal{M} \vDash \neg\phi(a_{\overline{i}}) \end{cases}\right).$$

Nach Ramsey (verwendet via der offensichtliche Bijektion $I^{\overrightarrow{n}} \xrightarrow{\equiv} [I]^n$, nämlich $\overline{i} \mapsto \{i_1, \ldots, i_n\}$) sei $I' \subseteq I$ eine unendliche f-einfarbige Teilmenge. Sei $\overline{j} \in J^{\overrightarrow{m}}$, sodass $c_{\overline{j}}$ der Tupel von den Konstante, die in T_0 vorkommen, ist. Sei $\overline{i} \in (I')^{\overrightarrow{m}}$. Dann $(\mathcal{M}; a_{\overline{i}}) \vDash T_0$. □

Lemma 13.8. *Sei T eine Theorie mit unendlichen Modelle. Sei J eine unendliche lineare Ordnung. Dann hat T ein Modell mit einer nicht-konstanten ununterscheidbaren Folge $(b_j)_{j \in J}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ ein unendliches Modell und sei $(a_i)_{i \in \omega}$ eine Folge von verschiedenen Elementen von $\mathcal{M}$. Verwende Lemma 13.7, das gibt $(b_j)_{j \in J}$, und bemerke, dass $b_j \neq b_{j'}$ für $j \neq j'$, weil $x_1 \neq x_2 \in \mathrm{EM}((a_i)_i) \subseteq \mathrm{EM}((b_j)_J)$. □

13.3 Überabzählbare Kategorizität $\Rightarrow$ ω-Stabilität

Sei T eine abzählbare vollständige Theorie mit unendlichen Modelle.

Lemma 13.9. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es $\mathcal{M} \models T$, sodass $|\mathcal{M}| = \kappa$ und für jedes $B \subseteq \mathcal{M}$ mit $|B| \leq \aleph_0$:*

$$|\{\text{tp}(a/B) : a \in \mathcal{M}\}| \leq \aleph_0.$$

Beweis. Nach Lemma 6.4 können wir annehmen, dass T interne Skolemfunktionen besitzt.

Nach Lemma 13.8 gibt es $\mathcal{N} \models T$ mit eine nicht-konstante ununterscheidbare Folge von Elementen $(a_i)_{i\in\kappa}$.

Setze $\mathcal{M} := \langle\{a_i\}_i\rangle^{\mathcal{N}}$. Nach Lemma 6.3 gilt $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Weil $|T| \leq \aleph_0$, gilt $|\mathcal{M}| = \kappa$.

Sei $B \subseteq \mathcal{M}$ abzählbar; es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ realisiert nur abzählbar viele Typen über B. Sei $B = \{f_k(a_{\bar{i}_k}) : k \in \omega\}$, wobei f_k ein Term ist und $\bar{i}_k \in \kappa^{\overrightarrow{n_k}}$; sei $I_B \subseteq \kappa$ die Menge von Indizes, die vorkommen. Sei $c \in \mathcal{M}$. Sei $c = g(a_{\bar{j}})$, wobei g ein Term ist und $\bar{j} \in \kappa^{\overrightarrow{n}}$. Nach Ununterscheidbarkeit hängt $\text{tp}(c/B)$ nur von den Term g (für den es nur abzählbar viele Möglichkeiten gibt) und die quantorenfreien 1-Typen $\text{qftp}^{(\kappa;<)}(j_i/I_B)$ für $1 \leq i \leq |\bar{j}|$ ab. Dann folgt das Lemma nach der folgenden Behauptung und der Abzählbarkeit von I_B.

Behauptung. *Sei $J \subseteq \kappa$ unendlich. Dann $|\{\text{qftp}^{(\kappa;<)}(\alpha/J) : \alpha \in \kappa\}| = |J|$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \kappa \setminus J$. Dann $\text{qftp}(\alpha/J)$ ist bestimmt durch dem Schnitt von α in J, d.h. durch $J_{>\alpha} := \{\gamma \in J : \gamma > \alpha\}$. Wenn $J_{>\alpha}$ nicht leer ist, ist es bestimmt durch $\min J_{>\alpha} \in J$, das existiert nach Wohlgeordnetheit.

Somit gibt es $\leq |J|$ Möglichkeiten für $\text{qftp}(\alpha/J)$ mit $\alpha \in \kappa \setminus J$, und offensichtlich gibt es $|J|$ Möglichkeiten für $\text{qftp}(\alpha/J)$ mit $\alpha \in J$. □

□

Proposition 13.10. *Wenn T eine überabzählbar kategorische Theorie ist, ist T total transzendent.*

Beweis. Sei T kategorisch in $\lambda > \aleph_0$ aber nicht total transzendent. Nach Satz 11.3 ist T nicht ω-stabil. Sei somit $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ mit $|A| \leq \aleph_0$ aber $|S_1(A)| > \aleph_0$. Sei $P \subseteq S_1(A)$ mit $|P| = \aleph_1$. Nach Lemma 7.16 finden wir $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ und $b_p \in \mathcal{M}'$ für $p \in P$ mit $\text{tp}(b_p/A) = p$. Nach Löwenheim-Skolem finden wir eine elementare Erweiterung oder Unterstruktur $\mathcal{M}''$ von $\mathcal{M}'$, die $A \cup \{b_p : p \in P\}$ enthält, mit $|\mathcal{M}''| = \lambda$.

Aber nach Lemma 13.9 gibt es ein Modell von Mächtigkeit λ, das nur abzählbar viele Typen über abzählbare Mengen realisiert, das also nicht isomorph zu $\mathcal{M}''$ ist, was Kategorizität widerspricht. □

Korollar 13.11. *Sei $\lambda > \aleph_0$. Dann ist T λ-kategorisch genau dann, wenn jedes Modell der Mächtigkeit λ saturiert ist.*

Beweis. $\Leftarrow$ Lemma 7.21.

⇒ Nach Proposition 13.10 und Korollar 11.4 ist T λ-stabil. Für jedes $\kappa < \lambda$ hat T nach Korollar 10.7(ii) ein κ^+-saturiertes Modell der Mächtigkeit λ. Dann durch λ-Kategorizität ist jedes Modell der Mächtigkeit λ κ^+-saturiert für alle $\kappa < \lambda$, also λ-saturiert.

□

14 Vaughtsche Paare

Sei T eine abzählbare vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modelle.

Definition 14.1.

- Ein **Vaughtsches Tripel** (in T) ist ein Tripel $(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi)$, wobei
  - $\mathcal{M} \vDash T$;
  - $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ eine echte elementare Erweiterung ist;
  - $\phi(x)$ eine nicht-algebraische $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel ist;
  - $\phi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{M})$.

  $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ ist dann ein **Vaughtsches Paar**.

- T **hat ein Vaughtsches Paar**, wenn es ein Vaughtsches Paar gibt, d.h. wenn es ein Vaughtsches Tripel gibt.

Beispiele 14.2.

- $((\{0,1\} \times \mathbb{Q}; <), (\{0\} \times \mathbb{Q}; <), x < (0,0))$ ist ein Vaughtsches Tripel in DLO, wobei die Ordnung ist die lexikografische Ordnung.
- $((\omega + \omega; \omega), ((\omega + \omega) \setminus \{0\}; \omega \setminus \{0\}), \neg P)$ ist ein Vaughtsches Tripel in der Sprache $\{P\}$, wobei P ein unäres Prädikatszeichen ist.

Lemma 14.3. *Wenn T kein Vaughtsches Paar hat, eliminiert T den Quantor $\exists^\infty$.*

Beweis. Es genügt zu betrachten den 1-Variable Fall, weil $\exists^\infty \overline{x}.\ \phi(\overline{x}, \overline{y})$ durch $\bigvee_i \exists^\infty x_i.\ \exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{|\overline{x}|}.\ \phi(\overline{x}, \overline{y})$ ausgedrückt sein kann.

Nehmen wir also für einen Widerspruch an, dass $\phi(x, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\overline{b}_i \in \mathcal{M}_i \vDash T$ sind so, dass $i \mapsto |\phi(\mathcal{M}_i, \overline{b}_i)|$ eine echte aufsteigende Abbildung $\omega \to \omega$ ist. Durch Realisieren von jedem $\mathrm{tp}(\overline{b}_i)$ in einem ω-saturiertes Modell $\mathcal{M}$, können wir annehmen, dass $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ für alle $i \in \omega$.

Sei $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ eine echte elementare Erweiterung. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist, auf ω. Dann ist $\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \succeq \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ auch eine echte elementare Erweiterung (In der Tat: Wenn $c \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, gilt (via der diagonalen Einbettung) $c \in \mathcal{N}^{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$). Sei $\overline{b} = \lim_{i \to \mathcal{U}} \overline{b}_i \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$. Dann ist $\phi(\mathcal{M}^{\mathcal{U}}, \overline{b})$ unendlich, aber $\phi(\mathcal{N}^U, \overline{b}) = \phi(\mathcal{M}^U, \overline{b})$, weil $\phi(\mathcal{N}, \overline{b}_i) = \phi(\mathcal{M}, \overline{b}_i)$ für alle i. Somit ist $(\mathcal{N}^{\mathcal{U}}, \mathcal{M}^{\mathcal{U}}, \phi(x, \overline{b}))$ Vaughtsche. □

Lemma 14.4. *Wenn T kein Vaughtsches Paar hat und $A \subseteq \mathcal{N} \vDash T$ und $\phi(x)$ eine nicht-algebraische $\mathcal{L}(A)$-Formel ist, ist $\mathcal{N}$ minimal über $A \cup \phi(\mathcal{N})$.*

Beweis. Sonst gibt es $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ mit $A \cup \phi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$. Dann $\phi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N})$ und ϕ ist eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel. Also ist $(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi)$ Vaughtsche. □

Lemma 14.5. *Nehmen wir an, dass T ω-stabil ist und $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0, \phi)$ ein Vaughtsches Tripel ist. Sei $\kappa > \aleph_0$. Dann gibt es ein Vaughtsches Tripel $(\mathcal{N}^\kappa, \mathcal{M}, \phi)$ mit $|\mathcal{N}^\kappa| = \kappa$ und $|\mathcal{M}| = \aleph_0$.*

Beweis. ϕ ist eine $\mathcal{L}(A)$-Formel für ein endliches $A \subseteq \mathcal{M}_0$. Durch Ersetzung von T mit $\mathrm{Th}((\mathcal{M}_0)_A)$, die auch ω-stabil ist, können wir annhemen, dass ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel ist.

Behauptung. *Es gibt ein Vaughtsches Tripel $(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi)$ mit $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ abzählbare saturiete Modelle.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}_P := \mathcal{L}\dot{\cup}\{P\}$, wobei P ein unäres Prädikatszeichen ist. Sei

$$\begin{aligned} T_P := T \\ &\cup \{\forall \overline{x}.\, (\bigwedge_i P(x_i) \rightarrow (\exists y.\, \psi(\overline{x}, y) \rightarrow \exists y.\, (P(y) \wedge \psi(\overline{x}, y)))) : \psi(\overline{x}, y) \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}\} \\ &\cup \{\forall x.\, (\phi(x) \rightarrow P(x))\} \\ &\cup \{\exists x.\, \neg P(x)\}. \end{aligned}$$

Für $\mathcal{N}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subseteq \mathcal{N}$ setze $(\mathcal{N}; A)$ die $\mathcal{L}_P$-Struktur, die $\mathcal{N}$ expandiert und mit $P((\mathcal{N}; A)) = A$. Dann (nach dem Tarski-Test) $(\mathcal{N}; \mathcal{M}) \models T_P$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models T$ und $(\mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi)$ Vaughtsche ist.

T_P ist konsistent, weil $(\mathcal{N}_0; \mathcal{M}_0) \models T_P$. Nach Löwenheim-Skolem sei $(\mathcal{N}'_0; \mathcal{M}'_0)$ ein abzählbares Modell von T_P. Wir gehen wie in Satz 8.4 vor: Wir konstruieren eine elementare Kette von abzählbare Modelle $(\mathcal{N}'_0; \mathcal{M}'_0) \preceq (\mathcal{N}'_1; \mathcal{M}'_1) \preceq \ldots$ mit $(\mathcal{N}'_{i+1}; \mathcal{M}'_{i+1})$ so gewählt, dass $\mathcal{N}'_{i+1}$ alle $\mathcal{L}$-Typen über endliche Teilmenge von $\mathcal{N}'_i$ realisiert und $\mathcal{M}'_{i+1}$ alle $\mathcal{L}$-Typen über endliche Teilmenge von $\mathcal{M}'_i$ realisiert; dies ist möglich, weil T schmal weil ω-stabil ist und jeder $\mathcal{L}$-Typ $p(x)$ über eine Teilmenge von $\mathcal{M}'_i$ ist konsistent modulo T_P mit $P(x)$.

Dann ist $(\mathcal{N}; \mathcal{M}) := \bigcup_{i\in\omega}(\mathcal{N}'_i; \mathcal{M}'_i) \models T_P$ abzählbar, und beide $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ sind saturiert als Modelle von T. □

Behauptung. *Es gibt $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{M}$ mit $|\mathcal{N}'| = \aleph_1$, sodass $(\mathcal{N}', \mathcal{M}, \phi)$ Vaughtsche ist. Insbesondere gilt $|\phi(\mathcal{N}')| = \aleph_0$.*

Beweis. Wir konstruieren eine elementare Kette $(\mathcal{M}^\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ von abzählbare saturierte Modelle mit $\phi(\mathcal{M}^\alpha) = \phi(\mathcal{M})$.

Sei $\mathcal{M}^0 := \mathcal{M}$. Sei $\mathcal{M}^\alpha$ konstruiert und setze $\mathcal{M}^{\alpha+1} \succeq \mathcal{M}^\alpha$, sodass $(\mathcal{M}^{\alpha+1}, \mathcal{M}^\alpha) \cong (\mathcal{N}, \mathcal{M})$; dies existiert, weil $\mathcal{M}^\alpha \cong \mathcal{M}$ (nach Saturiertheit und Lemma 7.21). Dann $\phi(\mathcal{M}^{\alpha+1}) = \phi(\mathcal{M}^\alpha) = \phi(\mathcal{M})$, und $\mathcal{M}^{\alpha+1}$ ist abzählbar und saturiert. Für $\eta \in \aleph_1$ eine Limeszahl setze $\mathcal{M}^\eta := \bigcup_{\alpha<\eta} \mathcal{M}^\alpha$. Dann $\phi(\mathcal{M}^\eta) = \bigcup_{\alpha<\eta} \phi(\mathcal{M}^\alpha) = \phi(\mathcal{M})$, und $\mathcal{M}^\eta$ ist abzählbar und saturiert.

Schließlich sei $\mathcal{N}' := \bigcup_{\alpha\in\aleph_1} \mathcal{M}^\alpha$. Dann $\phi(\mathcal{N}') = \phi(\mathcal{M})$, und $|\mathcal{N}'| = \aleph_1$, weil $\mathcal{M}^{\alpha+1} \supsetneq \mathcal{M}^\alpha$. □

Behauptung. *Sei $\mathcal{A} \models T$ mit $|\mathcal{A}| > \aleph_0$ aber $|\phi(\mathcal{A})| = \aleph_0$. Dann gibt es $\mathcal{B}$, sodass $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \phi)$ Vaughtsche ist und $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.*

Beweis. Nenne eine $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Formel $\theta(x)$ *abzählbar* bzw. *überabzählbar*, wenn $\theta(\mathcal{A})$ ist. Weil $x \doteq x$ überabzählbar ist und es kein binären Baum von $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Formeln gibt, gibt es eine überabzählbare $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Formel $\psi(x)$, sodass für jede $\mathcal{L}(A)$-Formel $\theta(x)$ entweder $\psi(x)\wedge\theta(x)$ oder $\psi(x)\wedge\neg\theta(x)$ abzählbar ist[5]. Dann $p(x) := \{\theta(x) :$

[5]Eine solche Formel ψ heißt *quasiminimal*, in Analagon mit einer minimalen Formel.

$\psi(x) \wedge \theta(x)$ überabzählbare ist$\}$ ist ein Typ.

Sei $b \models p(x)$ eine Realisierung in einer elementaren Erweiterung, $b \in \mathcal{A}' \succeq \mathcal{A}$. Nach Satz 11.13 können wir finden $\mathcal{A} \cup \{b\} \subseteq \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}'$ mit $\mathcal{B}$ konstruierbar über $\mathcal{A} \cup \{b\}$. Nach Löwenheim-Skolem und Primheit gilt $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A} \cup \{b\}| = |\mathcal{A}|$. Nach Lemma 11.15 (ÜA 10.2) ist $\mathcal{B}$ atomar über $\mathcal{A} \cup \{b\}$.

Nehmen wir an, dass $\phi(\mathcal{B}) \neq \phi(\mathcal{A})$. Sei $c \in \phi(\mathcal{B}) \setminus \phi(\mathcal{A})$. Sei $\xi(x, b)$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-Formel, die $\mathrm{tp}(c/\mathcal{A} \cup \{b\})$ isoliert. Dann

$$b \models \Theta(y) := \{\exists x.\, \xi(x,y)\} \cup \{\forall x.\, (\xi(x,y) \to (\phi(x) \wedge x \neq a)) : a \in \phi(\mathcal{A})\}.$$

Nun enthält $\Theta(y) \subseteq p(y)$ abzählbar viele Formeln, also nach der Definition von p ist $\psi(\mathcal{A}) \cap \bigcap\{\theta(\mathcal{A}) : \theta(y) \in \Theta(y)\}$ eine Durchschnitt von abzählbar viele coabzählbare Teilmenge von der überabzählbare Menge $\psi(\mathcal{A})$, also nicht-leer. Somit gibt es $b' \in \mathcal{A}$, sodass $b' \models \Theta(y)$. Dann gibt es c', sodass $\mathcal{A} \models \xi(c', b')$. Dann $\mathcal{A} \models \phi(c')$, aber für jedes $a \in \phi(\mathcal{A})$ gilt $\overline{c}' \neq a$, was einen Widerspruch ist. □

Setze $\mathcal{N}^0 := \mathcal{N}'$. Durch Anwendung von dieser letzten Behauptung für Nachfolgerordinalzahlen und Nehmen von Vereinigungen für Limeszahlen, bauen wir eine elementare Kette $(\mathcal{N}^\alpha)_{\alpha \in \kappa}$, sodass für alle $\alpha \in \kappa$:

- $\phi(\mathcal{N}^\alpha) = \phi(\mathcal{M})$;
- $\mathcal{N}^{\alpha+1}$ eine echte elementare Erweiterung von $\mathcal{N}^\alpha$ ist;
- $|\mathcal{N}^\alpha| = |\alpha| + \aleph_1$.

Setze $\mathcal{N}^\kappa := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \mathcal{N}^\alpha$. Dann $|\mathcal{N}^\kappa| = \kappa$, und $(\mathcal{N}^\kappa, \mathcal{M}, \phi)$ ist Vaughtsche. □

Proposition 14.6. *Angenommen, T ist überabzählbar kategorische. Dann hat T kein Vaughtsches Paar.*

Beweis. Nach Proposition 13.10 ist T ω-stabil. Sei $\kappa > \aleph_0$, sodass T κ-kategorisch ist, und sei $\mathcal{M}$ das Modell von Mächtigkeit κ. Nehmen wir an, dass T ein Vaughtsches Paar hat. Nach Lemma 14.5 gibt es dann eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(x)$, sodass $|\phi(\mathcal{M})| = \aleph_0$. Aber dann ist $\mathcal{M}$ nicht saturiert, weil es $\{\phi(x)\} \cup \{x \neq a : a \in \phi(\mathcal{M})\}$ vermeidet. Dies widerspricht Korollar 13.11. □

15 Baldwin-Lachlan

Lemma 15.1. *Sei T eine total transzendente Theorie. Wenn $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ und $\mathcal{M}$ minimal über A ist, ist $\mathcal{M}$ konstruierbar über A.*

Beweis. Nach Satz 11.13 gibt es $A \subseteq \mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ mit $\mathcal{N}$ konstruierbar über A. Nach der Minimalität gilt $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. □

Satz 15.2 (Baldwin-Lachlan)**.** *Sei T eine abzählbare vollständige Theorie mit unendlichen Modelle. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist κ-kategorisch für ein $\kappa > \aleph_0$;

(ii) T ist ω-stabil und hat kein Vaughtsches Paar;

(iii) T besitzt ein Primmodell $\mathcal{M}_0$ und eine streng minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$-Formel $\phi(x)$, sodass jedes $\mathcal{M} \succeq \mathcal{M}_0$ konstruierbar und minimal über $\mathcal{M}_0 \cup \phi(\mathcal{M})$ ist;

(iv) T ist κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$ und besitzt $\leq \aleph_0$ abzählbare Modelle bis auf Isomorphie.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Proposition 13.10 und Proposition 14.6.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nach Satz 11.13 (oder Proposition 8.23) besitzt T ein Primmodell $\mathcal{M}_0$.

Nach Lemma 14.3 und Korollar 12.15 gibt es eine streng minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$-Formel $\phi(x)$.

Sei $\mathcal{M} \succeq \mathcal{M}_0$. Nach Lemma 14.4 ist $\mathcal{M}$ minimal über $\mathcal{M}_0 \cup \phi(\mathcal{M})$. Nach Lemma 15.1 ist $\mathcal{M}$ auch konstruierbar über $\mathcal{M}_0 \cup \phi(\mathcal{M})$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Proposition 12.37.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sofort.

□

Korollar 15.3 (Morleysatz)**.** *Eine abzählbare vollständige Theorie ist in einer überabzählbare Kardinalzahl kategorisch genau dann, wenn sie in aller überabzählbare Kardinalzahlen kategorisch ist.*

Fakt 15.4 (Baldwin-Lachlan)**.** *(iv) kann verbessert werden, "entweder 1 oder $\aleph_0$ abzählbare Modelle" zu sagen.*

16 Morleyrang

Definition 16.1. Sei $\mathrm{On}^{\pm\infty} := \{-\infty\} \cup \mathrm{On} \cup \{+\infty\}$ die Wohlordnung, die On erweitert, wobei $\forall \alpha \in \mathrm{On}.\ -\infty < \alpha < +\infty$.

Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

- Der **Morleyrang in** $\mathcal{M}$ einer $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel $\phi(\overline{x})$ ist

$$\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) := \inf\{\alpha \in \mathrm{On}^{\pm\infty} : \mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) \leq \alpha\} \in \mathrm{On}^{\pm\infty},$$

  wobei wir rekursiv definieren $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) \leq \alpha \in \mathrm{On}^{\pm\infty}$ durch:

  - $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) \leq -\infty$, wenn $\phi(\mathcal{M}) = \emptyset$;
  - $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) \leq \alpha \in \mathrm{On}$, wenn für jede $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln $(\psi_i(\overline{x}))_{i\in\omega}$, die disjunkte Teilmengen von $\phi(\mathcal{M})$ definieren (d.h. für alle $i \neq j \in \omega$ gilt $\psi_i(\mathcal{M}) \subseteq \phi(\mathcal{M})$ und $\psi_i(\mathcal{M}) \cap \psi_j(\mathcal{M}) = \emptyset$), existieren $i \in \omega$ und $\beta \in \mathrm{On}^{\pm\infty}$ mit $\beta < \alpha$, sodass $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\psi_i) \leq \beta$.
  - $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) \leq +\infty$ für alle ϕ;

- Definiere der **Morleyrang** einer $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel durch $\mathrm{MR}(\phi) := \mathrm{MR}^{\mathcal{N}}(\phi)$, wobei $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ jede $\aleph_0$-saturierte elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ ist. (Wir beweisen in Lemma 16.3(ii), dass dies wohl-definiert ist.)

Remark 16.2.

- $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x})) = 0 \Leftrightarrow 0 < |\phi(\mathcal{M})| \in \omega \Leftrightarrow \mathrm{MR}(\phi(\overline{x})) = 0$.
- Wenn $\phi(\overline{x})$ minimal in $\mathcal{M}$ ist, gilt $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi) = 1$.
- Wenn $\phi(\overline{x})$ streng minimal in $\mathcal{M}$ ist, gilt $\mathrm{MR}(\phi) = 1$.

Lemma 16.3. *(i) Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ $\aleph_0$-saturierte $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Seien $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ und $\overline{a}' \in (\mathcal{M}')^{|\overline{y}|}$ mit $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}'}(\overline{a}')$. Dann $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = \mathrm{MR}^{\mathcal{M}'}(\phi(\overline{x}, \overline{a}'))$.*

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Seien $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \succeq \mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturierte elementare Erweiterungen. Sei ϕ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel. Dann $\mathrm{MR}^{\mathcal{N}}(\phi) = \mathrm{MR}^{\mathcal{N}'}(\phi)$.

Daher ist $\mathrm{MR}(\phi)$ wohl-definiert.

Beweis. (i) Nach der Definition von $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}$ genügt es zu zeigen:

Behauptung. *Sei $\alpha \in \mathrm{On}^{\pm\infty}$. Angenommen, $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \leq \alpha$. Dann $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}'}(\phi(\overline{x}, \overline{a}') \leq \alpha$.*

Beweis. Durch Induktion über α. Wenn $\alpha = -\infty$, gilt $\mathcal{M}' \vDash \neg\exists\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{a}')$, weil $\mathcal{M} \vDash \neg\exists\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{a})$ und $\overline{a} \equiv \overline{a}'$.

Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Angenommen, es gibt $\psi_i(\overline{x}, \overline{c}'_i)$ für $i \in \omega$ mit $\psi_i(\overline{x}, \overline{y}_i)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\overline{c}'_i \in (\mathcal{M}')^{|\overline{y}_i|}$, sodass $\psi_i(\mathcal{M}', \overline{c}'_i)$ disjunkte Teilmengen von $\phi(\mathcal{M}', \overline{a}')$ sind. Durch $\aleph_0$-Saturiertheit und $\overline{a} \equiv \overline{a}'$können wir rekursiv finden $\overline{c}_i \in \mathcal{M}^{|y_i|}$, sodass $\overline{a}, \overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_n \equiv \overline{a}', \overline{c}'_0, \ldots, \overline{c}'_n$ (für alle $n \in \omega$). Dann sind $\psi_i(\mathcal{M}, \overline{c}_i)$ disjunkte Teilmengen von $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$, also es gibt $i \in \omega$ und $\beta < \alpha$, sodass $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}}(\psi_i(\mathcal{M}, \overline{c}_i)) \leq \beta$. Aber $\overline{c}_i \equiv \overline{c}'_i$, also nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}'}(\psi_i(\mathcal{M}, \overline{c}'_i)) \leq \beta$. Somit gilt $\mathrm{MR}^{\mathcal{M}'}(\phi(\overline{x}, \overline{a}') \leq \alpha$.

Für $\alpha = +\infty$ ist die Behauptung klar. □

(ii) Sei $\phi = \phi(\overline{x}, \overline{a})$, wobei $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel ist und $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$. Dann gilt $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}'}(\overline{a})$, und die Behauptung folgt aus (i).

□

Lemma 16.4. *Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Seien ϕ, ϕ' $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln.*

(i) $\phi(\mathcal{M}) \subseteq \phi'(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathrm{MR}(\phi) \leq \mathrm{MR}(\phi')$.

(ii) $\mathrm{MR}(\phi \vee \phi') = \max\{\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MR}(\phi')\}$.

Beweis. (i) Dies folgt direkt aus den Definitionen.

(ii) Durch (i)genügt es zu zeigen $\leq$. Wir zeigen dies durch Induktion über α. Angenommen, $\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MR}(\phi') \leq \alpha \in \mathrm{On}$; wir zeigen $\mathrm{MR}(\phi \vee \phi') \leq \alpha$. Sei $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert, und seien $(\psi_i)_{i \in \omega}$ $\mathcal{L}(\mathcal{N})$-Formeln, sodass $(\psi_i(\mathcal{N}))_i$ disjunkte Teilmengen von $\phi(\mathcal{N}) \cup \phi'(\mathcal{N})$ sind. Dann ist $\{i \in \omega : \mathrm{MR}(\phi \wedge \psi_i) \geq \mathrm{MR}(\phi)\}$ endlich, und ähnlich für ϕ'. Also es gibt $i \in \omega$, sodass $\mathrm{MR}(\phi \wedge \psi_i) < \mathrm{MR}(\phi) \leq \alpha$ und $\mathrm{MR}(\phi' \wedge \psi_i) < \mathrm{MR}(\phi') \leq \alpha$, also durch der Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{MR}(\psi_i) = \mathrm{MR}((\phi \wedge \psi_i) \vee (\phi' \wedge \psi_i)) < \alpha.$$

□

16.1 Morleygrad

Sei $\mathcal{M}$ eine $\aleph_0$-saturierte $\mathcal{L}$-Struktur, und sei $T := \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Lemma 16.5. *Let ϕ be an $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ formula. If $\mathrm{MR}(\phi) \geq (2^{|T|})^+$, then $\mathrm{MR}(\phi) = +\infty$.*

Beweis. Let $\alpha \in \mathrm{On}$ be minimal such that no $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-formula has rank α. Then by transfinite induction, no formula has ordinal rank $\geq \alpha$. So $|\alpha|$ is the number of ordinal ranks attained by $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-formulas. Now by Lemma 16.3(i), $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$ depends only on the $\mathcal{L}$-formula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ and $\mathrm{tp}(\overline{a})$. So $|\alpha| \leq |T| \cdot |S(\emptyset)| \leq 2^{|T|}$. □

Definition 16.6. Für $\alpha \in \mathrm{On}$ sind $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln ϕ und ϕ' **α-äquivalent**, $\phi \approx_\alpha \phi'$, wenn $\mathrm{MR}(\phi \Delta \phi') < \alpha$.

Lemma 16.7. *$\approx_\alpha$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind klar. Transitivität folgt aus Lemma 16.4(ii) und der Tautologie

$$(\phi \Delta \phi'') \to ((\phi \Delta \phi') \vee (\phi' \Delta \phi'')).$$

□

Definition 16.8. Eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel ϕ ist **α-streng-minimal** wenn $\mathrm{MR}(\phi) = \alpha \in \mathrm{On}$ und für jede $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel ψ entweder $\mathrm{MR}(\phi \wedge \psi) < \alpha$ oder $\mathrm{MR}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$.

Lemma 16.9. *Sei ϕ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel. Wenn $MR(\phi) = \alpha \in \mathrm{On}$, gibt es $d \in \omega$ und α-streng-minimale $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_d$, sodass $\phi \leftrightarrow_T \bigvee_i \psi_i$ und $\psi_i \vdash_T \neg\psi_j$ für $i \neq j$.*

Diese Anzahl d ist eindeutig bestimmt. Die ψ_i sind bis auf $\approx_\alpha$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Angenommen, dass ϕ besitzt keine solche Zerlegung. Insbesondere ist ϕ nicht α-streng-minimal, also sei $\mathrm{MR}(\phi \wedge \psi) = \alpha = \mathrm{MR}(\phi \wedge \neg\psi)$. Wenn beide $\phi \wedge \psi$ und $\phi \wedge \neg\psi$ eine solche Zerlegung besäßen, besäße auch ϕ eine; Also besitzt mindestens ein keine solche Zerlegung. Durch Fortsetzung auf diese Weise, erlangen wir eine unendliche Familie von disjunkte $MR = \alpha$ Teilmengen von $\phi(\mathcal{M})$, was $\mathrm{MR}(\phi) = \alpha$ widerspricht.

Ad Eindeutigkeit: wenn ψ' α-streng-minimal ist und $\psi' \vdash_T \phi$, gilt nach Lemma 16.4(ii) $MR(\psi' \wedge \psi_i) = \alpha$ für ein i, also $\psi' \approx_\alpha (\psi' \wedge \psi_i) \approx_\alpha \psi_i$. Bis auf $\approx_\alpha$ sind daher ψ_i genau die α-streng-minimalen Formeln, die ϕ implizieren. □

Definition 16.10. Sei ϕ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel.

Wenn $\mathrm{MR}(\phi) \in \mathrm{On}$, ist der **Morleygrad** $\mathrm{MD}(\phi)$ die Anzahl d in Lemma 16.9. Wenn $\mathrm{MR}(\phi) \in \{-\infty, +\infty\}$, setze $\mathrm{MD}(\phi) := 0$.

Nach Lemma 16.3(i) hängt $\mathrm{MD}(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$ nur von $\mathrm{tp}(\overline{a})$ ab, insbesondere nicht von die Wahl von $\aleph_0$-saturiertem Modell $\mathcal{M}$.

Setze $\mathrm{MRD}(\phi) := (\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MD}(\phi)) \in \mathrm{On}^{\pm\infty} \times \omega$. Betrachte $\mathrm{On}^{\pm\infty} \times \omega$ als eine Wohlordnung mit der lexikografischen Ordnung.

Bemerkung 16.11. ϕ ist streng minimal gdw $\mathrm{MRD}(\phi) = (1, 1)$.

Lemma 16.12. *Seien ϕ, ϕ' $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln mit $\phi(\mathcal{M}) \cap \phi'(\mathcal{M}) = \emptyset$. Dann*

$$\mathrm{MRD}(\phi \vee \phi') = \begin{cases} \max(\mathrm{MRD}(\phi), \mathrm{MRD}(\phi')) & (\mathrm{MR}(\phi) \neq \mathrm{MR}(\phi')) \\ (\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MD}(\phi) + \mathrm{MD}(\phi')) & (\mathrm{MR}(\phi) = \mathrm{MR}(\phi')) \end{cases}.$$

Beweis. Übung. □

Proposition 16.13. *T ist total transcendent gdw* $\mathrm{MR}(\phi) < +\infty$ *für alle $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln ϕ.*

Beweis. $\Rightarrow$: Angenommen, $\mathrm{MR}(\phi) = +\infty$. Dann $\mathrm{MR}(\phi) > (2^{|T|})^+$, also ϕ zerlegt in Formeln $\phi \wedge \psi$ und $\phi \wedge \neg\psi$ beide von Rang $\geq (2^{|T|})^+$und also nach Lemma 16.5 von Rang $+\infty$. Somit finden wir einen binären Baum, der total Transcendenz widerspricht.

$\Leftarrow$: Sei $(\phi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ ein binärer Baum von $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln. Sei $\mathrm{MRD}(\phi_s) = \inf_s \mathrm{MRD}(\phi_s)$. Durch der Voraussetzungen gilt $\mathrm{MR}(\phi_s) \in \mathrm{On}$. Aber dann gilt $\mathrm{MRD}(\phi_s) \geq \mathrm{MRD}(\phi_{s0} \vee \phi_{s1})$, und Lemma 16.12 ergibt einen Widerspruch.

□

Definition 16.14. Sei X eine $\mathcal{M}$-definierbare Menge, d.h. $X = \phi(\mathcal{M})$ für eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel ϕ. Dann setze $\mathrm{MRD}(X) := \mathrm{MRD}(\phi)$.

Lemma 16.15. *Sei $f : X \to Y$ eine $\mathcal{M}$-definierbare Bijektion von $\mathcal{M}$-definierbaren Mengen. Dann $MRD(X) = \mathrm{MRD}(Y)$.*

Beweis. Durch Induktion über MRD. Übung. □

Proposition 16.16 (Baldwin-Saxl, tt Fall)**.** *Sei $(G; \cdot)$ eine total transzendente Gruppe. Dann gibt es kein unendliche absteigende Kette von G-definierbare Untergruppe $G = G_0 > G_1 > \ldots$.*

Beweis. Angenommen, $(G_i)_i$ ist solche. Jedes G_i enthält G_{i+1} und eine verschiedene (also disjunkt) Nebenklasse $g_i G_{i+1}$, und $\mathrm{MRD}(g_i G_{i+1}) = \mathrm{MRD}(G_{i+1})$, weil $x \mapsto g_i x$ eine definierbare Bijektion ist. Nun $\mathrm{MR}(G_i) < \infty$ nach Proposition 16.13, also nach Lemma 16.12 gilt $\mathrm{MRD}(G_i) > \mathrm{MRD}(G_{i+1})$. Somit widersprechen wir die Wohlordnungkeit von $\mathrm{On}^{\pm\infty} \times \omega$. □

Fakt 16.17 (Macintyre)**.** *Jeder total transzendenter Körper $(K; +, \cdot)$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Vermutung 16.18 (Cherlin-Zilber Algebraizität-Vermuting)**.** *Wenn $(G; \cdot)$ eine unendliche einfache Gruppe mit* $\mathrm{MR}^{(G;\cdot)}(G) < \omega$ *ist, ist G eine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.*

Definition 16.19. Sei $A \subseteq \mathcal{M}$.

- Für $p \in S(A)$, $\mathrm{MRD}(p) := \inf_{\phi \in p} \mathrm{MRD}(\phi)$.
- Für $a \in \mathcal{M}$, $\mathrm{MRD}(a/A) := \mathrm{MRD}(\mathrm{tp}(a/A))$.

Lemma 16.20. *Sei ϕ eine konsistente $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel.*

(i) $\mathrm{MR}(\phi) = \max\{\mathrm{MR}(p) : \phi \in p \in S(\mathcal{M})\}$.

(ii) *Wenn* $\mathrm{MR}(\phi) \in \mathrm{On}$, *gibt es genau* $\mathrm{MD}(\phi)$ *viele Typen* $\phi \in p_i \in S(\mathcal{M})$ *mit* $\mathrm{MR}(p_i) = \mathrm{MR}(\phi)$.

Beweis. (i) Es genügt zu finden $p \in S(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(\phi)$. Wenn $\mathrm{MR}(\phi) = +\infty$, hat jedes $p \ni \phi$ Rang $\mathrm{MR}(p) = +\infty$. Sonst: Sei $\phi' \vdash \phi$ mit $\mathrm{MRD}(\phi') = (\mathrm{MR}(\phi), 1)$. Dann $p_{\phi'} := \{\psi : \mathrm{MR}(\phi' \wedge \psi) = \mathrm{MR}(\phi')\}$ ist vollständig und $\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(\phi') = \mathrm{MR}(\phi)$.

(ii) Nach Lemma 16.9 enthält jeder solche Typ p_i ein ϕ' wie in (i), also $p_i = p_{\phi'}$. □

Lemma 16.21. *Sei* $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. *Wenn* $\overline{b} \in \mathrm{acl}(A \cup \overline{a})$, *gilt* $\mathrm{MR}(\overline{b}/A) \leq \mathrm{MR}(\overline{a}/A)$.

Beweis. Durch Induktion über $\alpha := \mathrm{MR}(\overline{a}/A)$. Der Behauptung ist sofort wenn $\alpha = +\infty$, also nehmen wir an, dass $\alpha \in \mathrm{On}$.

Sei $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/A)$ mit $\models \forall \overline{x}.\ \exists^{\leq d} \overline{y}.\ \psi(\overline{x}, \overline{y})$ und $\mathrm{MR}(\exists \overline{y}.\ \psi(\overline{x}, \overline{y})) = \alpha$.

Seien $(\delta_i(\overline{y}))_{i \in \omega}$ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln, die disjunkt Teilmengen von $\exists \overline{x}.\ \psi(\overline{x}, \overline{y})$ definieren.

Sei $\epsilon_i(\overline{x}) := \exists \overline{y}.\ (\psi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \delta_i(\overline{y}))$. Die Konjunktion von jede $d+1$ von den ϵ_i ist inkonsistent, und es folgt, dass $\mathrm{MR}(\epsilon_{i_0}) < \alpha$ für ein i_0; In der Tat: sonst ist jedes ϵ_i in mindestens eins von die endlich viele $\mathrm{MR} = \alpha$ Typen auf $\exists \overline{y}.\ \psi(\overline{x}, \overline{y})$ von Lemma 16.20(ii), also enthält ein unendlich viele ϵ_i, was die Inkonsistenz von jede $d+1$ widerspricht.

Nun sei $A' \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{M}$, sodass ψ und δ_{i_0} sind beide $\mathcal{L}(A')$-Formeln. Nach Lemma 16.20(i) und $\aleph_0$-Saturiertheit sei $\overline{b}' \in \delta_{i_0}(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{MR}(\overline{b}'/A') = \mathrm{MR}(\delta_{i_0})$. Dann gibt es $\overline{a}' \in \epsilon_{i_0}(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a}', \overline{b}')$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\mathrm{MR}(\delta_{i_0}) = \mathrm{MR}(\overline{b}'/A') \leq \mathrm{MR}(\overline{a}'/A') < \alpha$. Daher $\mathrm{MR}(\overline{b}/A) \leq \mathrm{MR}(\exists \overline{x}.\ \psi(\overline{x}, \overline{y})) \leq \alpha$, wie gewünscht. □

16.2 Morleyrang in einer streng minimalen Theorie

Sei T eine streng minimale Theorie. Sei $\mathcal{M} \models T$ $\aleph_0$-saturiert.

Definition 16.22. Sei $A \subseteq \mathcal{M}$ und $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Dann ist $\dim(\overline{a}/A)$ das maximale n mit $\overline{a}' \models \mathfrak{p}_A^{(n)}$ für ein Untertupel $\overline{a}'$ von $\overline{a}$.

Satz 16.23. *Seien* $A \subseteq \mathcal{M}$ *und* $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. *Dann* $\mathrm{MR}(\overline{a}/A) = \dim(\overline{a}/A)$.

Beweis. Sei $n := \dim(\overline{a}/A)$, und sei $\overline{a}'$ ein Untertupel mit $\overline{a}' \models \mathfrak{p}_A^{(n)}$. Durch die Maximalität gilt dann $a_i \in \mathrm{acl}(A \cup \overline{a}')$ für alle i. Dann $\mathrm{acl}(A \cup \overline{a}') = \mathrm{acl}(A \cup \overline{a})$, also nach Lemma 16.21 $\mathrm{MR}(\overline{a}/A) = \mathrm{MR}(\overline{a}'/A)$. Wir können somit annehmen, dass $\overline{a} = \overline{a}' \models \mathfrak{p}_A^{(n)}$ und $n > 0$. Wir können induktiv annehmen, dass $\mathrm{MR}(\overline{a}/Aa_1) = \dim(\overline{a}/Aa_1) = n-1$.

Sei $\psi(\overline{x}) \in \mathfrak{p}_A^{(n)}$. Setze $\psi'(\overline{x}, y) := (\psi(\overline{x}) \wedge x_1 \doteq y)$. Dann $\overline{a} \models \psi'(\overline{x}, a_1)$, also $\mathrm{MR}(\psi'(\overline{x}, a_1)) \geq n-1$. Nach Lemma 16.3(i) $\mathrm{MR}(\psi'(\overline{x}, a_1')) \geq n-1$ für jedes $a_1' \models \mathfrak{p}_A$; diese Formeln sind paarweise inkonsistent, also $\mathrm{MR}(\psi) \geq n$.

Nach der Behauptung für $m < n$haben wir inducktiv, dass für jedes $B \subseteq \mathcal{M}' \models T$ jeder Typ $p \in S_n(B)$ mit $p \neq \mathfrak{p}_B^{(n)}$ Rang $\mathrm{MR}(p) < n$ hat.

Sei $\theta(\overline{x})$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel mit $\theta \vdash \psi$ und $\mathrm{MR}(\theta) = n$. Nach Lemma 16.20(i) für θ und dem letzen Absatz gilt $\mathrm{MR}(\mathfrak{p}_{\mathcal{M}}^{(n)}) = n$. Also noch nach Lemma 16.20(i) und dem letzen Absatz gilt $\mathrm{MR}(\overline{x} \doteq \overline{x}) = n$. Dann $\mathrm{MR}(\psi) = n$. Somit gilt $\mathrm{MR}(\mathfrak{p}_A^{(n)}) = n$. $\square$

17 Anerkennungen

Thanks to Tim Clausen who assisted the course and wrote the problem sheets, in particular for his patience in answering my many questions on German grammar and usage, and for correcting many of my errors. Thanks to the participants of the course. Thanks to Blaise Boissonneau, Morris Kopelke, and Jonathan Krebs for pointing out errors and omissions along the way. Thanks to Martin Hils, Franziska Jahnke, and Itay Kaplan for helpful discussion.

This course was based on previous iterations of the Münster Logik II course, and in preparing it I made extensive use of lecture notes by Martin Hils, Franziska Jahnke, and Katrin Tent on their versions of the course. The course also owes much to the books of Tent-Ziegler, Marker, Hodges, Buechler, and Hils-Loeser. My thanks to all these authors.