Remplissage dans des réseaux de Q-rang 1 et dans des groupes résolubles

Cornelia DRUŢU*

UFR de Mathématiques et URA 751 au CNRS,
Université de Lille I, F–59655 Villeneuve d'Ascq, France

Abstract

We prove that for certain solvable groups and for certain non-uniform irreducible lattices of $\mathbb{Q}$-rank 1 in semisimple groups of noncompact type without compact factors the order of the Dehn function is "asymptotically" less than cubic. The main tool we are using is the asymptotic cone.

1 Introduction

Dans cet article on étudie l'ordre de la fonction de remplissage dans certains groupes de Lie et l'ordre de la fonction de Dehn associée à certains groupes infinis de présentation finie $\Gamma =< S|R >$.

La fonction de Dehn dans un groupe de présentation finie, $A : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, est l'équivalent combinatoire de la fonction de remplissage définie en géométrie riemannienne (définition dans la section 2.2.2). La fonction de Dehn dépend de la présentation choisie pour le groupe Γ, mais pas son ordre, défini cidessous.

Si deux fonctions réelles f_1 et f_2 vérifient une relation de type $f_1(x) \leq af_2(bx + c) + dx + e$, où a, b, c, d, e sont des constantes positives, on dit que *l'ordre de f_1 est au plus l'ordre de f_2* et on le note par $f_1 \prec f_2$.

Si $f_1 \prec f_2$ et $f_2 \prec f_1$ on dit que les deux fonctions sont *du même ordre*. La relation *même ordre* est une relation d'équivalence entre fonctions numériques.

On rappelle que deux espaces métriques X et Y sont dits *quasi-isométriques* s'il existe une fonction $f : X \to Y$ et des constantes $L \geq 1$ et $C \geq 0$ telles

*e-mail address : `drutu@gat.univ-lille1.fr`

que :
• $\frac{1}{L}d(x,y) - C \leq d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) + C$
• $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $d(y, f(x)) \leq C$.
Une telle fonction f s'appelle *une quasi-isométrie.*

On a le résultat suivant :

Théorème 1.1 ([Al]). *Soient $\Gamma =< S|R >$ et $\Gamma' =< S'|R' >$ deux groupes de présentation finie. Si les espaces métriques (Γ, d_w) et (Γ', d'_w) sont quasi-isométriques (où d_w et d'_w sont les métriques des mots définies sur Γ et Γ' relativement aux systèmes de générateurs S et S', respectivement), alors les fonctions de Dehn associées aux deux présentations ont le même ordre.*

Ce théorème implique en particulier l'indépendance de l'ordre de la fonction de Dehn de la présentation choisie pour Γ. L'invariance sous quasi-isométries de l'ordre de la fonction de Dehn est une des raisons pour lesquelles celui-ci est intéressant à étudier. Une deuxième raison est que cet ordre mesure la complexité de l'algorithme des mots.

Dans ce papier on s'intéresse à l'évaluation de l'ordre de la fonction de Dehn pour des réseaux Γ non-uniformes irréductibles de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans des groupes de Lie semisimples G de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 3 (définition dans la section 3.3).
Cas connus : Si Γ est un réseaux non-uniforme irréductible de G et le $\mathbb{R}$-rang de G est 1, alors la fonction de Dehn est polynômiale de degré 2 ou 3, selon la classe du groupe unipotent maximal de G ([**Gr**]$_1$ et [**Pi**]). Si le $\mathbb{R}$-rang de G est 2, la fonction de Dehn de Γ est exponentielle ([**PL**]). Si le $\mathbb{R}$-rang de G est plus grand que 2, on sait seulement que la fonction de Dehn de Γ est au plus exponentielle ([**Gr**]$_3$, [**Le**], corollaire 4.2)

Thurston a conjecturé dans [**ECHPT**] que $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 4$, a une fonction de Dehn polynômiale d'ordre 2.

Dans cet article on démontre le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soit Γ un réseau non-uniforme irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans un groupe de Lie G, semisimple de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 3, de centre trivial et sans facteurs compacts. Si Γ vérifie la propriété (Π) (voir la section 4 pour la définition de cette propriété), alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon ,\ A(n) \leq n^{3+\varepsilon}.$$

Ce théorème entraîne par exemple un ordre de la fonction de Dehn asymptotiquement cubique pour les groupes modulaires de Hilbert des corps des nombres totalement réels de degré au moins 3 sur $\mathbb{Q}$ (section 3.3). Par contre, il ne s'applique pas à $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, qui est de $\mathbb{Q}$-rang $n - 1 \geq 2$.

Dans la preuve du théorème 1.2 on part des propriétés fondamentales des réseaux de $\mathbb{Q}$-rang un. On a d'abord le théorème général suivant :

Théorème 1.3 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan, cf. [LMR]$_1$, [LMR]$_2$). *Soit G un groupe de Lie semisimple de* **R***-rang plus grand ou égal à 2 muni* *d'une métrique invariante à gauche et soit* Γ *un réseau irréductible de* G*. Alors* Γ *muni d'une métrique des mots est bilipschitz équivalent à* Γ *muni de la métrique induite.*

Ce théorème permet de remplacer sur Γ la métrique des mots par la métrique induite, dans l'étude de la fonction de Dehn.

Soit $X = G/K$ l'espace symétrique associé à G et $Y = \Gamma\backslash X$. A indice fini près on peut supposer que Γ est sans torsion, donc que Y est un espace localement symétrique. L'espace Y a un nombre fini de bouts, et chaque bout est une pointe difféomorphe à un produit $[0, \infty) \times C$, où C est l'espace total d'une fibration différentielle de fibre une nil-variété et de base une variété compacte C^∞ ([**Bo**], §17). Aussi, l'espace Y a un coeur compact Y_0 qui est le quotient par Γ d'un sous-espace X_0 de X construit comme le complémentaire d'une famille dénombrable $\mathcal{F}$ d'horoboules ouvertes (définition 3.3). Si le $\mathbb{Q}$-rang de Γ est un, ces horoboules sont deux à deux disjointes. Le bord de X_0 est formé par une famille dénombrable $\partial\mathcal{F}$ d'horosphères qui sont les bords des horoboules de $\mathcal{F}$.

Le groupe Γ muni de la métrique induite est quasi-isométrique à X_0 muni de la métrique induite. Ainsi, étudier la fonction de Dehn de Γ revient à étudier la fonction de remplissage de (X_0, d_X).

Soit c une courbe lipschitzienne fermée dans X_0, de longueur ℓ. Comme X est à courbure nonpositive et contractile, on peut remplir c en l'écrivant comme le bord d'un disque D plongé dans X, d'aire au plus $c_0\ell^2$ (c_0 constante universelle). En remplaçant éventuellement le disque par un cylindre au dessus de c dans une direction régulière, on peut supposer de plus que D et les horosphères de $\partial\mathcal{F}$ sont transverses. On obtient ainsi c comme bord extérieur d'un disque troué dans X_0 et on réduit le problème du remplissage de c dans X_0 au problème du remplissage des courbes dans les horosphères de $\partial\mathcal{F}$. On ne peut pas utiliser la projection naturelle d'une horoboule sur une horosphère, car celle-ci peut accroître exponentiellement les aires, or on cherche un remplissage polynômial. On recourt alors aux cônes asymptotiques des espaces métriques considérés.

Le cône asymptotique est un outil d'étude de la géométrie à grande échelle introduit par M. Gromov ([**Gr**]$_1$, [**Gr**]$_3$), L. Van den Dries et A. J. Wilkie ([**VDW**]). On associe à tout espace métrique donné un nouvel espace métrique construit avec des méthodes d'analyse non-standard et qui représente une "image de l'espace métrique donné vu de l'infini".

Chaque cône asymptotique $\mathbf{K}$ de l'espace symétrique X est un immeuble euclidien épais homogène ([**KlL**]). On démontre que chaque cône asymptotique $\mathbf{K}_0$ de X_0 est le complementaire d'une famille d'horoboules ouvertes deux à deux disjointes dans l'immeuble $\mathbf{K}$.

On ramène le problème de l'estimation du remplissage dans X_0 au même problème dans chaque $\mathbf{K}_0$ à l'aide d'un critère de remplissage d'ordre polynômial avec les cônes, dû à M. Gromov ([**Gr**]$_3$) et à P. Papasoglu ([**P**]), qui donne un contrôle pour l'ordre de remplissage dans l'espace à partir du remplissage dans les cônes. On donne la version précisée suivante, communiquée à l'auteur par P. Papasoglu :

Théorème 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique géodésique. S'il existe un $a > 0$ et un $p \in \mathbb{R}^*$ tels que dans chaque cône asymptotique de X on a $A(\ell) \leq a\ell^p$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\ell_\varepsilon > 0$ tel que dans X on a*

$$A^X(\ell) \leq \ell^{p+\varepsilon}, \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

On montre que le remplissage dans chaque $\mathbf{K}_0$ est cubique à partir du fait que c'est un sous-ensemble de l'immeuble euclidien $\mathbf{K}$ et qu'en enlevant des horoboules de $\mathbf{K}$ on fait des trous polytopiques dans ses appartements. On peut alors utiliser le caractère polynômial de la géométrie euclidienne. On obtient un théorème général de la forme : si $\mathbf{K}$ est un immeuble euclidien de rang au moins 3 et si $\mathcal{R}$ est un ensemble de rayons géodésiques dans $\mathbf{K}$ tels que les horoboules ouvertes $Hbo(\rho)$ déterminées par les rayons $\rho \in \mathcal{R}$ sont deux à deux disjointes, alors l'espace

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho \in \mathcal{R}} Hbo(\rho)$$

a un remplissage d'ordre cubique, sous certaines conditions techniques sur $\mathcal{R}$ (théorème 4.1). La preuve de ce théorème comprend deux étapes :

(1) On démontre d'abord quelques résultats généraux sur la forme des "trous" polytopiques qu'on fait dans les appartements de $\mathbf{K}$ en enlevant les horoboules.

(2) On part d'une courbe quelconque dans $\mathbf{K}_0$, qu'on remplace par une courbe formée d'un nombre fini d'arcs qui se trouvent chacun dans un appartement. On construit, dans une direction régulière, un cylindre au dessus de cette courbe qui est entièrement contenu dans $\mathbf{K}_0$ à partir d'une certaine hauteur, comparable à la longueur de la courbe. On déforme le cylindre pour contourner les trous formés en enlevant les horoboules et on obtient ainsi une surface de remplissage au plus cubique pour la courbe. On peut voir que l'hypothèse que le rang soit plus grand ou égal à 3 est essentielle ici, car on ne peut pas contourner des trous dans un plan.

Le théorème 4.1 implique aussi un remplissage au plus asymptotiquement cubique pour certains groupes résolubles (Corollaire 4.16). En particulier, le Corollaire 4.16 s'applique aux groupes résolubles $Sol_{2n-1}(\alpha) = \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}^{n-1}, n \geq 3$, où $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \to G\ell(n, \mathbb{R})$ est un morphisme injectif "générique", c'est-à-dire tel que son image est, à conjugaison près, un sous-tore dans un tore maximal orthogonal à l'origine à un vecteur dont toutes les composantes sont non-nulles. M. Gromov a déjà démontré que le remplissage de ces groupes est polynômial, sans préciser le degré ([**Gr**]$_3$).

Le plan de l'article est le suivant :

Dans le deuxième chapitre on définit les cônes asymptotiques, on énonce le critère de remplissage d'ordre polynômial et on donne une preuve.

Dans le troisième chapitre on étudie la forme des cônes asymptotiques pour des réseaux non-uniformes irréductibles de $\mathbb{Q}$ -rang 1.

Dans le dernier chapitre on démontre le théorème 4.1 et on conclut que la fonction de Dehn dans certains réseaux de $\mathbb{Q}$-rang 1 et le remplissage dans certains groupes résolubles est au plus "asymptotiquement " cubique, au sens de la conclusion du Théorème 1.2.

Remerciements

La source de cet article se trouve dans mon travail de thèse à l'Université de Paris-Sud, sous la direction de Pierre Pansu que je tiens à remercier ici. Je remercie aussi Panagiotis Papasoglu pour m'avoir communiqué son critère de remplissage polynômial (le théorème 2.7 dans cet article) ainsi que pour de nombreuses discussions utiles. Je remercie également Christophe Pittet qui m'a expliqué le problème du remplissage et le referee pour les suggestions qui ont ameliorée la rédaction de cet article.

2 Cône asymptotique

2.1 Construction

Dans la construction des cônes asymptotiques on utilise des ultrafiltres non-principaux. Un *ultrafiltre nonprincipal* est une mesure de probabilité,

$$\omega : \ P(\mathbb{N}) \to \{0, 1\},$$

finiment additive, telle que $\omega(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{N}$, A finie. On peut aussi le définir comme la fonction caractéristique d'une partie $P \subset P(\mathbb{N})$ qui est un ultrafiltre au sens de [**Bou**], I.6.4, et qui contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire le filtre formé par les complémentaires des ensembles finis.

L'existence des ultrafiltres nonprincipaux est assuré par le théorème de [**Bou**], I.6.4, qui dit que tout filtre est contenu dans au moins un ultrafiltre.

Dans un espace topologique (X, τ) on définit la *ω-limite d'une suite* $(a_n) \subset X$ comme étant un élément $a \in X$ tel que pour tout voisinage V de a, $\omega(A_V) = 1$, où $A_V = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in V\}$. Si X est séparé la ω-limite est unique.

Dans les ensembles compacts tout ultrafiltre est convergent ([**Bou**], I.9.1). En particulier toute suite numérique bornée a une ω-limite.

Soit (X, d) l'espace métrique auquel on veut associer un cône asymptotique. On choisit un ultrafiltre nonprincipal ω, une suite $f_0 : \mathbb{N} \to X$ qu'on appelle *suite des centres d'observation*, et une suite numérique $(d_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on appelle *suite des scalaires.*

Définition 2.1 ([Gr]$_3$). *On pose* $C = \{f : \mathbb{N} \to X \quad | \quad d(f(n), f_0(n)) \leq c_f \cdot d_n\}$. *Si on introduit sur* C *la relation d'équivalence*

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{\omega} \frac{d(f(n), g(n))}{d_n} = 0,$$

alors $C/\sim= Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *est le* ω*-cône asymptotique par rapport aux centres d'observation* $(f_0(n))$ *et aux scalaires* (d_n)*. C'est un espace métrique avec la métrique*

$$d([f], [g]) = \lim_\omega \tfrac{d(f(n),g(n))}{d_n}.$$

Remarque 2.2. *Si l'action de* $Isom(X)$ *sur* X *a un domaine fondamental borné, alors pour un ultrafiltre nonprincipal* ω *et une suite numérique* (d_n) *fixés, tous les* $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *avec* f_0 *variable sont isométriques entre eux et isométriques à* $Con_\omega(X, x_0, (d_n))$*,* ω*-cône asymptotique avec la suite des centres d'observation constante égale à* $x_0 \in X$*.*

On appelle *ensemble limite* toute partie $A \subset Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ telle qu'il existe une suite d'ensembles $A_n \subset X$ telle que $A = \{[x_n]; x_n \in A_n \ \omega\text{-p.s.}\}$. On note $A = [A_n]$.

Lemme 2.3. *Soient* (X, d) *et* (Y, δ) *deux espaces métriques,* $A \subset X, B \subset Y$ *et* $\varphi : A \to B$ *une isométrie. On pose* $X \vee_\varphi Y = X \vee Y/_{x \equiv \varphi(x)}$ *muni de la métrique* D *définie par* $D\mid_{X\times X}= d, D\mid_{Y\times Y}= \delta$ *et* $D(x, y) = \inf_{a \in A}[d(x, a) + \delta(\varphi(a), y)]$ *si* $x \in X$*,* $y \in Y$*.*

On a $Con_\omega(X \vee_\varphi Y) = Con_\omega X \vee_{Con_\omega \varphi} Con_\omega Y$*, où* $Con_\omega\varphi : Con_\omega A \to Con_\omega B$ *est l'isométrie naturelle induite par* φ*.*

Preuve. L'ultrafiltre nonprincipal ω choisit toujours dans une partition finie de $\mathbb{N}$ un seul élément qu'il charge. C'est pourquoi tout $[f] \in Con_\omega(X \vee_\varphi Y)$ se trouve dans $Con_\omega X$ ou dans $Con_\omega Y$. Si $x = [x_n] \in Con_\omega(X \vee_\varphi Y)$ se trouve dans les deux, alors $[x_n] = [y_n]$, où $y_n \in X$ et $[x_n] = [z_n]$, où $z_n \in Y$.

Comme $[y_n] = [z_n]$, $\lim_\omega \frac{D(y_n,z_n)}{d_n} = 0$, ce qui implique qu'il existe une suite a_n dans A telle que $\lim_\omega(d(y_n, a_n) + \delta(\varphi(a_n), z_n))/d_n = 0$. Alors $\lim_\omega \frac{d(y_n,a_n)}{d_n} = 0$ et $\lim_\omega \frac{\delta(z_n,\varphi(a_n))}{d_n} = 0$, d'où $[y_n] = [a_n] \in Con_\omega A$, $[z_n] = [\varphi(a_n)] = Con_\omega B$. $\diamondsuit$

On peut trouver d'autres propriétés et des exemples de cônes asymptotiques dans [**Gr**]$_3$, [**VDW**], [**KL**], [**KlL**].

2.2 Remplissage polynômial et cône asymptotique

2.2.1 Fonction de remplissage riemannienne

Soit V une variété riemannienne et $c : S^1 \to V$ une courbe différentiable par morceaux. On appelle *surface qui remplit la courbe* c une application

$\sigma : D^2 \to X$, différentiable à l'exception d'un ensemble négligeable de points telle que $\sigma \mid_{S^1} = c$. On appelle *aire de remplissage de* c, et on note $A(c)$, le minimum des aires des surfaces qui remplissent c.

On définit *la fonction de remplissage* pour tout $\ell > 0$ par

$$A(\ell) = \sup\{A(c) \mid c \text{ courbe de longueur } \leq \ell\}.$$

2.2.2 Fonction de Dehn dans un groupe

On dispose d'une notion analogue dans la théorie des groupes, la fonction de Dehn. Si $\Gamma =< S|R >$ est un groupe de présentation finie, *la fonction de remplissage*, appelée aussi *la fonction de Dehn*, se définit comme suit. Soit F_S le groupe libre engendré par S et π la projection canonique de F_S sur Γ. Si g est un mot de F_S tel que $\pi(g) = e$ (donc g est une courbe dans le graphe de Cayley associé à Γ) on définit *l'aire de* $g, A(g)$, comme le plus petit N tel que $g = \prod_{i=1}^{N} \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}, \gamma_i \in F_S, r_i \in R \cup R^{-1}$.

On définit *la fonction de Dehn associée au groupe* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$A(n) = \sup\{A(g) \mid g \in F_S \text{ mot de longueur } \leq n, \pi(g) = e\}.$$

D'après le théorème 1.1, l'ordre de la fonction de Dehn ne dépend pas de la présentation du groupe.

2.2.3 Fonction de remplissage dans un espace métrique

On peut définir une notion de fonction de remplissage dans un espace métrique général, X, qu'on suppose géodésique pour simplifier les raisonnements. Pour cela, on considère une courbe lipschitzienne fermée c, de longueur finie ℓ. On suppose qu'elle est paramétrée proportionnellement à la longueur de l'arc, $c : S^1 \to X$.

Soit D^2 le disque unité du plan de bord S^1.

• On considère une partition quelconque, $\wp$, de D^2 en des polygones homéomorphes au disque. On appelle *partition de* c *dans* X l'image par une application injective π de l'ensemble des sommets de $\wp$ (qu'on note toujours $\wp$), telle que $\pi|_{S^1 \cap \wp} = c|_{S^1 \cap \wp}$. On peut joindre dans X par des arcs géodésiques les paires de points qui sont des images de sommets de $\wp$ joints par une arête. On obtient ainsi le même nombre de contours que dans $\wp$.

• On appelle *maille de la partition* π, et on la note Mesh π, la longueur maximale des contours qui forment la partition.

On définit $\text{Mesh}(c, \nu) = \inf\{\text{Mesh}(\pi) \mid \pi : \wp \to X, \wp$ partition de D^2 en ν parties, $\pi \mid_{S^1} = c\}$.

Soit c une courbe lipschitzienne fermée. On note $P(c, \delta)$ le ν minimal tel que $\text{Mesh}(c, \nu) \leq \delta$.

Pour $\ell > \delta$, on note $P(\ell, \delta) = \sup\{P(c, \delta); c$ courbe lipschitzienne de longueur $\leq \ell\}$.

On suppose que l'espace X vérifie la propriété :

$$(P_{\delta_0'}) \quad P(\ell,\delta) < +\infty, \forall \ell \geq \delta \geq \delta_0'$$

et on considère δ_0'' le minimum des δ_0' pour lesquels on a cette propriété, et $\delta_0 = \max\{1, \delta_0''\}$. Alors il n'est pas difficile de voir que pour tous δ_1, δ_2, et ℓ tels que $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 < \ell$ on a :

$$P(\ell,\delta_2) \leq P(\ell,\delta_1) \leq P(\ell,\delta_2) \cdot P(2\delta_2,\delta_1).$$

Notations : Désormais on suppose que les espaces métriques considérés dans cette section vérifient une propriété de type $(P_{\delta_0'})$ et on prend toujours le minimum δ_0'' des δ_0' et $\delta_0 = \max\{1, \delta_0''\}$.

Définition 2.4. *Pour un $\delta \geq \delta_0$ on définit la δ-aire d'une courbe lipschitzienne fermée c par $A_\delta(c) = P(c,\delta)$. De même, on définit la δ-fonction de remplissage par*

$$A_\delta(\ell) = P(\ell,\delta)\ \forall \ell \geq \delta.$$

D'après la remarque précédente, toute fonction de remplissage définie pour un $\delta \geq \delta_0$ a le même ordre que A_{δ_0}.

On appelle alors A_{δ_0} la fonction de remplissage de l'espace X .

Remarque 2.5. *Si $f : X \to Y$ est une application L-bilipschitzienne (c'est-à-dire telle que f et f^{-1} sont L-lipschitziennes), alors les fonctions de remplissage des espaces X et Y ont le même ordre. Plus précisément :*

$$A^Y_{L\delta}\left(\frac{\ell}{L}\right) \leq A^X_\delta(\ell) \leq A^Y_{\frac{\delta}{L}}(L\ell),\ \forall \delta \geq L \cdot \delta_0^Y.$$

Remarque 2.6. *(1) Soit Γ un groupe de présentation finie. On fixe une présentation $\Gamma =< S|R >$. La fonction de Dehn associé à cette présentation, $A(n)$, est du même ordre que la δ-aire $A_\delta(n)$ dans le graphe de Cayley X de Γ. Ceci n'est pas difficile à voir si à partir de la présentation $< S|R >$ on construit une présentation où tous les éléments de R sont de longueur 3, en ajoutant des générateurs. Dans la nouvelle présentation $< S'|R' >$ on a $A'(n) = A_3(n)$ et on applique le théorème 1.1.*

(2) Si $X = V$ est une variété riemannienne avec un groupe d'isométries qui agit avec domaine fondamental compact, il est facile de voir que la fonction de remplissage riemannienne et la fonction de remplissage métrique ont le même ordre.

2.2.4 Contrôle des ordres de remplissage par les cônes asymptotiques

Le théorème suivant a été communiqué à l'auteur par P. Papasoglu et précise un résultat de [**Gr**]$_3$ et [**P**].

Théorème 2.7. *Soit (X, d) un espace métrique géodésique. S'il existe un $a > 0$ et un $p \in \mathbb{R}^*$ tels que dans chaque cône asymptotique de X on a*

$$A_1(\ell) \leq a\ell^p, \ \forall \ell \geq 1,$$

alors :

(i) *L'espace (X, d) vérifie une propriété de type $(P_{\delta_0'})$. Soit $A^X(\ell) = A^X_{\delta_0}(\ell)$ la fonction de remplissage de X.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\ell_\varepsilon > 0$ tel que dans X on a*

$$A^X(\ell) \leq \ell^{p+\varepsilon}, \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

Preuve. D'abord on transforme l'hypothèse de la manière donnée dans le lemme ci-dessous :

Lemme 2.8. *Soit X un espace métrique géodésique. Pour tout $p \in \mathbb{R}^*$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\exists a > 0$ *tel que dans chaque cône asymptotique de X on a :*
$$A_1(\ell) \leq a\ell^p, \ \forall \ell \geq 1 \ ;$$

(b) $\exists a > 0$ *tel que dans chaque cône asymptotique de X on a :*
$$P(\ell, \ell/m) \leq am^p, \forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2.$$

Preuve du lemme. L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est évidente.

Pour démontrer (a)$\Rightarrow$ (b) il suffit de voir que l'application

$$I_\lambda : Con_\omega(X, (d_n), f_0) \to Con_\omega(X, (\lambda d_n), f_0), I_\lambda([x_n]) = [x_n].$$

est une homothétie. $\diamondsuit$

On utilise aussi le lemme suivant :

Lemme 2.9. *Si dans un espace géodésique X il existe un $M \in \mathbb{N}, M \geq 2$, tel que $P(\ell, \ell/M)$ est uniformément majoré par un $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ pour tout ℓ plus grand qu'un ℓ_0, alors*

(1) *L'espace (X, d) vérifie une propriété de type $(P_{\delta_0'})$. Soit $A^X(\ell) = A^X_{\delta_0}(\ell)$ la fonction de remplissage de X.*

(2) *On a $A^X(\ell) \leq C\ell^\alpha$ pour $\ell \geq \ell_0$, où $\alpha = \frac{\ln \nu_0}{\ln M}$ et C est une constante.*

Preuve du lemme. Soit c une courbe lipschitzienne de longueur $\leq \ell$. On a une partition de c en ν_0 parties de maille au plus $\frac{\ell}{M}$. Si la maille est aussi plus petite ou égale à ℓ_0 on arrête. Sinon on partitionne chaque élément de la partition encore en ν_0 parties. On a donc une ν_0^2-partition de la courbe c de maille $\leq \frac{\ell}{M^2}$. Si la maille est plus petite ou égale à ℓ_0 on arrête, sinon on continue. Dans le pire des cas on va s'arrêter après d pas, $d \in \mathbb{N}^*$ minimal tel que

$$\frac{\ell}{M^d} \leq \ell_0 \Longleftrightarrow d \geq \log_M \frac{\ell}{\ell_0}.$$

Donc $d = \left[\log_M \frac{\ell}{\ell_0}\right] + 1$. D'où

$$P(\ell, \ell_0) \leq \nu_0^d \leq C'\nu_0^{\log_M \ell} = C'\ell^\alpha, \alpha = \frac{\ln \nu_0}{\ln M}\ .$$

Pour tout $\ell \geq \delta \geq \ell_0$ on a $P(\ell, \delta) \leq P(\ell, \ell_0) < \infty$. Alors X vérifie une propriété de type $(P_{\delta_0'})$ avec un δ_0' plus petit que ℓ_0. Soit δ_0'' le minimum des δ_0' et $\delta_0 = \max\{1, \delta_0''\}$.

On déduit alors que

$$A^X(\ell) = P(\ell, \delta_0) \leq P(2\ell_0, \delta_0) \cdot P(\ell, \ell_0) \leq C\ell^\alpha\ ,$$

si $2\ell_0 \geq \delta_0$ ou

$$A^X(\ell) = P(\ell, \delta_0) \leq P(\ell, \ell_0) \leq C'\ell^\alpha\ ,$$

si $2\ell_0 < \delta_0$. $\diamondsuit$

Démonstration du théorème 2.7. On démontre que (b) implique que dans l'espace X pour tout $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$, il existe un $\ell_0 = \ell_0(m)$ tel que

$$P(\ell, \ell/m) \leq a'm^p, \forall \ell \geq \ell_0, \text{ où } a' = a2^p\ .$$

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un $m \geq 2$ et une suite de courbes lipschitziennes fermées (c_n) de longueurs $\ell_n \to \infty$ telles que

$$P(c_n, \ell_n/m) > a'm^p.$$

Alors, si on note $\nu = a'm^p$, Mesh $(c_n, \nu) > \frac{\ell_n}{m}$.

On prend la suite de centres d'observation $f_0(n) \in c_n(S^1)$, et la suite de scalaires (ℓ_n), et dans $Con_\omega(X, f_0, (\ell_n))$, la suite des courbes (c_n) donne une courbe c de longueur 1 telle que Mesh$(c, \nu) \geq \frac{1}{m}$. D'autre part, d'après (b), Mesh $(c, \nu) \leq \frac{1}{2m}$, d'où une contradiction. Alors pour tout $m \geq 2$ il existe un $\ell_0 = \ell_0(m)$ tel que

$$P(\ell, \ell/m) \leq a'm^p, \forall \ell \geq \ell_0.$$

On applique le lemme 2.9 pour un m et $\nu_0 = a'm^p$, et il vient

$$A(\ell) \leq C\ell^\alpha\ \ \forall \ell \geq \ell_0(m), \text{ où } \alpha = \frac{\ln(a'm^p)}{\ln m} = \frac{\ln a'}{\ln m} + p.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si on prend m suffisamment grand on peut rendre α plus petit que $p + \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ℓ_0 suffisamment grand on a aussi $C \leq \ell^{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Donc on a $A(\ell) \leq \ell^{p+\varepsilon}$. $\diamondsuit$

3 La géométrie asymptotique d'un réseau de Q-rang 1

3.1 La géométrie des espaces à courbure nonpositive

Soit (X, d) un espace métrique $CAT(0)$ et soit $\partial_\infty X$ son bord à l'infini [**B**]. Pour chaque $x \in X$ et chaque $\alpha \in \partial_\infty X$ il existe un rayon géodésique unique r_α tel que $r_\alpha(0) = x$ et $r_\alpha(\infty) = \alpha$. Dans la suite on va utiliser la notation $[x, \alpha)$ pour un tel rayon.

Dans un espace $CAT(0)$ on peut définir une notion d'angle. Pour deux segments géodésiques $[x, a]$ et $[x, b]$ on considère le triangle de comparaison $\widetilde{xab}$, c'est-à-dire le triangle plan qui a les mêmes longueurs des arêtes que le triangle géodésique xab dans X. On note $\widetilde{<}_x(a, b)$ l'angle qu'on obtient au sommet $\widetilde{x}$.

On définit *l'angle formé par les segments ou les rayons géodésiques* $[x, a)$ *et* $[x, b)$ *en* x, $a, b \in X \sqcup \partial_\infty X$, par

$$<_x (a, b) = \lim_{t,s\to 0} \widetilde{<}_x(a_t, b_s)\,,$$

où a_t est le point de $[x, a)$ situé à distance t de x.

On définit une métrique sur $\partial_\infty X$, qu'on appelle *la métrique de Tits*, par

$$d_T(\alpha, \beta) = \sup_{x\in X} <_x (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in \partial_\infty X.$$

3.2 Espaces symétriques et immeubles

Dans cet article on adopte la manière géométrique de définir des immeubles introduite dans [**KlL**].

Si X est un espace symétrique de type non-compact ou un immeuble euclidien de rang plus grand ou égal à 2, alors son bord à l'infini, $\partial_\infty X$, muni de la métrique de Tits est un immeuble sphérique ([**Mo**], chap.15 et 16, ou [**BGS**], Appendix 5). Ses appartements sont les bords à l'infini des plats maximaux. Les chambres de $\partial_\infty X$, qui sont les bords à l'infini des chambres de Weyl de X, sont tous isométriques à une même chambre sphérique modèle Δ.

En général, si Σ est un immeuble sphérique de rang r, on appelle *marquage de* Σ une application $\phi : \mathcal{V} \to I$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des sommets de Σ et I est un ensemble de cardinal r, telle que la restriction de ϕ à l'ensemble des sommets d'une chambre est une bijection. Tout immeuble sphérique admet un marquage ([**Br**], IV.1, Proposition 1). En particulier le bord à l'infini $\partial_\infty X$ d'un immeuble euclidien ou d'un espace symétrique X. En utilisant ce marquage, on peut définir une projection $p : \partial_\infty X \to \Delta$ sur la chambre sphérique modèle ([**KlL**], [**Dr**]).

Définition 3.1. *Un rayon géodésique $r \subset X$ est dit singulier ou régulier si $r(\infty)$ est un point singulier ou régulier de l'immeuble sphérique $\partial_\infty X$, c'est-à-dire si $p(r(\infty)) \in \partial\Delta$ ou $p(r(\infty)) \in Int\Delta$, respectivement.*

Si X est un espace symétrique de type non-compact et G est la composante connexe de l'identité de son groupe d'isométries, à chaque point du bord $\alpha \in \partial_\infty X$ on peut associer un sous-groupe $P(\alpha) \subset G$ qui le fixe, c'est-à-dire qui fixe la classe de rayons asymptotes qui représente α. On appelle $P(\alpha)$ *le sous-groupe parabolique associé à α*. Son radical unipotent $U(\alpha)$ s'appelle *le sous-groupe unipotent associé à α*.

Parfois, quand on va considérer un rayon r dans l'espace symétrique, on va utiliser aussi les notations $P(r)$ et $U(r)$ pour les sous-groupes parabolique et unipotent associés à $r(\infty)$.

Si X est un immeuble euclidien, en chaque point $x \in X$ on peut définir *l'espace de directions au point x dans X*, $\Sigma_x X$, qui est formé par les classes d'équivalence des segments géodésiques issus de x par rapport à la relation d'équivalence "angle nul en x". On note $\overline{xa}$ la classe correspondant au segment $[x,a]$, et on l'appelle *la direction de $[x,a]$ en x*. De même, on note $\overline{x\alpha}$ la classe du rayon $[x,\alpha)$, $\alpha \in \partial_\infty X$.

L'espace $\Sigma_x X$ muni de la métrique donnée par $d_x(\overline{xa}, \overline{xb}) = <_x (a,b)$ est un immeuble sphérique ayant comme appartements les ensembles $F_x = \{\overline{xa} \mid [x,a] \subset F\}$, où F est un appartement de X qui passe par x. Les chambres sont de la forme $W_x = \{\overline{xa} \mid [x,a] \subset W\}$, où W est une chambre de Weyl de sommet x. De même pour les plats singuliers et les murs ([**KlL**], §4).

L'immeuble $\Sigma_x X$ a le même complexe de Coxeter modèle S et la même chambre modèle Δ que $\partial_\infty X$. On peut donc définir une projection $p_x : \Sigma_x X \to \Delta$. De plus, si cette projection est compatible avec $p : \partial_\infty X \to \Delta$ sur une chambre, c'est-à-dire s'il existe une chambre $\mathcal{W} \subset \partial_\infty X$ telle que $p_x(\overline{x\alpha}) = p(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{W}$, alors les deux projections sont compatibles partout : $p_x(\overline{x\alpha}) = p(\alpha)$, $\forall \alpha \in \partial_\infty X$.

Désormais on suppose que dans tout immeuble euclidien X, pour un marquage fixé sur $\partial_\infty X$, le marquage sur chaque $\Sigma_x X$ est choisi pour avoir la compatibilité entre les deux projections p_x et p, et ceci pour tout $x \in X$. Pour un rayon $[x,\alpha) \subset X$ on appelle la valeur commune de $p_x(\overline{x\alpha})$ et de $p(\alpha)$ *la direction du rayon.*

3.3 Généralités sur les réseaux de Q - rang 1

On rappelle la définition d'un réseau dans un groupe de Lie et du $\mathbb{Q}$-rang des réseaux dans des groupes de Lie semisimples.

Soit G un groupe de Lie. Un *réseau* dans G est un sous-groupe discret Γ tel que $\Gamma \backslash G$ admet une mesure finie G-invariante.

Soit G un groupe semisimple connexe de centre trivial et sans facteurs compacts. Un réseau Γ de G s'appelle *réseau arithmétique* s'il existe un

$\mathbb{Q}$-groupe algébrique semisimple H et un morphisme surjectif $\phi : H^0_{\mathbb{R}} \to G$ de noyau compact tel que Γ soit commensurable à $\phi(H_{\mathbb{Z}} \cap H^0_{\mathbb{R}})$, où $H_{\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des points entiers de H et $H^0_{\mathbb{R}}$ est la composante connexe de l'identité dans l'ensemble des points réels de H.

On a le théorème d'arithméticité suivant, dû à G. A. Margulis :

Théorème 3.2 ([Ma], [Zi]). *Soit G un groupe semisimple connexe de centre trivial et sans facteurs compacts. Si le $\mathbb{R}$-rang de G est plus grand ou égal à 2, alors tout réseau irréductible de G est arithmétique.*

Supposons que G est un groupe semisimple vérifiant toutes les hypothèses du théorème précédent. On définit *le $\mathbb{Q}$-rang d'un réseau irréductible* Γ dans G comme étant le $\mathbb{Q}$-rang du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique H associé à Γ par le théorème d'arithméticité. On remarque qu'en général la seule relation entre le $\mathbb{Q}$-rang du réseau Γ et le $\mathbb{R}$-rang du groupe de Lie semisimple ambient G est que le premier est plus petit ou égal au deuxième.

Par exemple, tous les réseaux irréductibles Γ dans des groupes semisimples $G = \prod_{i=1}^{k} G_i$ ayant au moins un facteur de $\mathbb{R}$-rang 1 sont des réseaux de $\mathbb{Q}$-rang 1 ([**Pr**], lemme 1.1). Les groupes modulaires de Hilbert sont des tels réseaux. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$. Alors on a n plongements différents de K dans $\mathbb{R}$ au dessus de $\mathbb{Q}$, $\sigma_i : K \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots n\}$. Soit ϑ_K l'anneau des entiers algébriques de K. Le groupe $\Gamma_K = PSL(2, \vartheta_K)$ s'appelle *le groupe modulaire de Hilbert du corps K*. Le groupe Γ_K peut être plongé à l'aide des plongements σ_i comme un réseau irréductible de $PSL(2,\mathbb{R}) \times PSL(2,\mathbb{R}) \times \cdots \times PSL(2,\mathbb{R})$ (n fois), donc c'est un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un ([**VG**], chapitre 1).

Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans un groupe de Lie G semisimple de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2. On étudie la géométrie à grande échelle de Γ. On rappelle d'abord les notions d'horosphère et d'horoboule. Soit (X, d) un espace métrique $CAT(0)$ et $r \subset X$ un rayon géodésique. *La fonction de Busemann associée au rayon r* est la fonction

$$f_r : X \to \mathbb{R},\ f_r(x) = \lim_{t\to\infty} (\, d(x, r(t)) - t\,).$$

Si r_1 et r_2 sont deux rayons asymptotes, alors $f_{r_1} - f_{r_2}$ est une fonction constante ([**BH**], chapitre 2). Donc la famille d'ensembles de niveau $\{x \in X \mid f_r(x) \leq a\}$ et la famille d'hypersurfaces de niveau $\{x \in X \mid f_r(x) = a\}$ de la fonction de Busemann ne dépendent pas du rayon r mais seulement de son point à l'infini $\alpha = r(\infty)$.

Définition 3.3. *On appelle horoboule centrée en α un ensemble de niveau de la fonction de Busemann. On appelle horosphère centrée en α une hypersurface de niveau de la fonction de Busemann. On appelle l'ensemble $\{x \in X \mid f_r(x) < a\}$ horoboule ouverte centrée en α.*

On note $Hb(r)$ l'horoboule $\{x \in X \mid f_r(x) \leq 0\}$ et on l'appelle l'horoboule déterminée par le rayon r. De même, on note $Hbo(r) = \{x \in X \mid f_r(x) < 0\}$, *qu'on appelle l'horoboule ouverte déterminée par r et $H(r) = \{x \in X \mid f_r(x) = 0\}$, qu'on appelle l'horosphère déterminée par r.*

A l'aide des horoboules on construit un sous-espace X_0 de X sur lequel Γ agit avec domaine fondamental compact.

Théorème 3.4 ([Ra], th.13.12, [Pr], prop. 2.1). *Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 d'un groupe semisimple G. Dans l'espace symétrique $X = G/K$ associé à G, il existe des rayons $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tels que*

(1) *$Hb(\gamma r_i) \cap Hb(r_j) = \emptyset$ si $i \neq j, \gamma \in \Gamma$ ou $i = j, \gamma \notin \Gamma \cap U(r_i)$.*

(2) *le quotient $\Gamma \backslash X_0$ de l'espace $X_0 = X \setminus \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma Hbo(r_i)$ est compact.*

On appelle X_0 *l'espace associé à* Γ.

Proposition 3.5 ([Dr], proposition 5.5). *Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans un groupe semisimple G de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2, et soit $X = G/K$ l'espace symétrique associé à G. Si $R = \{r_1, r_2, \ldots r_k\}$ est l'ensemble de rayons associées à Γ dans le théorème 3.4, alors :*

a) *pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots k\}$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma r_i(\infty)$ et $r_j(\infty)$ sont des points opposés ou égaux dans l'immeuble sphérique $\partial_\infty X$.*

b) *$p(\{\gamma r_i(\infty) \mid \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2, \ldots, k\}\})$ est un point, qu'on va noter θ (ici p est la projection de l'immeuble sphérique $\partial_\infty X$ sur la chambre sphérique modèle).*

On appelle θ *la direction associée à* Γ.

On peut faire, sur la position de θ dans Δ, l'affirmation suivante :

Proposition 3.6 ([Dr], proposition 5.7). *Soit $r \in \{\gamma r_i \mid i \in \{1, 2, \ldots k\}, \gamma \in \Gamma\}$, $r = \exp tV(r(0))$, où V est un vecteur de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ du groupe G. Soit $\mathbf{a}$ une sous-algèbre $\mathbb{R}$-diagonalisable maximale de $\mathbf{g}$ qui contient V et $\pi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ le système fondamental de racines associé à une chambre de Weyl qui contient V. Si $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$ est une décomposition en systèmes orthogonaux de racines, on ne peut pas avoir $\mu(V) = 0$ pour tout μ dans π_1.*

Corollaire 3.7. *Si un groupe de Lie semisimple G se décompose en un produit $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, $rang_{\mathbb{R}} G_i = 1$, et si Γ est un réseau irréductible de G, alors θ, la direction associée à Γ, est un point régulier.*

Remarque 3.8. *On peut préciser le résultat précédent dans le cas des groupes modulaires de Hilbert. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$, et soit Γ_K son groupe modulaire de Hilbert, qu'on peut voir comme* *réseau irréductible de $G = PSL(2, \mathbb{R})^n$. L'espace symétrique associé à G est $X = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$(n fois).*

*La chambre sphérique modèle de $\partial_\infty X$ est un quadrant de la sphère S^{n-1} et la direction associée à Γ_K est le barycentre de ce quadrant ([**VG**], chapitre 1).*

3.4 Le cône asymptotique d'un réseau de Q - rang 1

3.4.1 Le cône asymptotique d'un espace symétrique

Les définitions des notions de la théorie des immeubles qu'on utilise dans la suite peuvent être trouvées dans [**KlL**] ou [**Dr**].

Si X est un espace symétrique irréductible de rang plus grand ou égal à 2, son bord à l'infini muni de la métrique de Tits est un immeuble sphérique irréductible $\aleph_1$-épais ([**Mo**], chapitres 15 et 16, ou [**BGS**], Appendix 5).

Théorème 3.9 ([KlL]). *Tout cône asymptotique* $\mathbf{K}$ *d'un espace symétrique X irréductible de rang plus grand ou égal à 2 est un immeuble euclidien irréductible homogène $\aleph_1$-épais qui a comme appartements des plats qui sont des ensembles limites provenant de suites des plats maximaux de X. De même, les plats singuliers, les chambres de Weyl et leurs murs, les polytopes de Weyl de* $\mathbf{K}$ *sont des ensembles limites de suites d'objets du même type dans l'espace X. Ceci implique en particulier que $\partial_\infty \mathbf{K}$ et $\partial_\infty X$ ont le même complexe de Coxeter modèle.*

La structure d'immeuble euclidien de $\mathbf{K}$ détermine une structure d'immeuble sphérique sur $\partial_\infty \mathbf{K}$ et le complexe de Coxeter modèle de $\partial_\infty \mathbf{K}$ est le même que celui de $\partial_\infty X$. On note S ce complexe de Coxeter. Si on fixe un marquage sur $\partial_\infty X$, celui-ci induit un marquage sur $\partial_\infty \mathbf{K}$, et on a une projection $P : \partial_\infty \mathbf{K} \to \Delta$, où Δ est la même chambre modèle que pour $\partial_\infty X$. Le complexe de Coxeter modèle S a un marquage compatible avec les deux marquages sur $\partial_\infty X$ et sur $\partial_\infty \mathbf{K}$, et on a aussi une projection $p_S : S \to \Delta$.

3.4.2 Le cône asymptotique d'un réseau

On considère un réseau non-uniforme irréductible Γ de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans un groupe G semisimple de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2. D'après le théorème 1.3 et le théorème 3.4, les cônes asymptotiques de (Γ, d_w), où d_w est une métrique des mots, sont bilipschitz équivalents aux cônes asymptotiques de X_0 muni de la métrique induite, donc en vue d'appliquer le théorème 2.7 il suffit d'étudier ces cônes de X_0. On fixe un point d'observation $x_0 \in X_0$ et une suite de scalaires (d_n) qu'on ne mentionnera plus dans la suite. Étudier des cônes asymptotiques avec centre d'observation fixé est suffisant dans ce cas, d'après la Remarque 2.2.

On essaie d'obtenir $Con_\omega X_0$ à partir de $Con_\omega X$, par une construction géométrique. Avec les notations du lemme 2.3, on peut écrire

$$X = X_0 \vee_\varphi \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i), \text{ où}$$

$$\varphi = \mathrm{id} : \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H(\gamma r_i) \to \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H(\gamma r_i).$$

Alors :

$$Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi Con_\omega(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i)),$$

où ϕ est l'identité sur $Con_\omega(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i))$.

On a

$Con_\omega(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i)) = \{[x_n]; x_n \in \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i), d(x_0, x_n) \leq cd_n\}$

$= \bigcup_{i=1}^{k} \{[x_n]; x_n \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Hb(\gamma r_i), d(x_0, x_n) \leq cd_n\}$ (puisque ω choisit toujours une seule parmi un nombre fini de possibilités) $= \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\substack{(\gamma_n)\text{t.q.}\\ d(e,\gamma_n)\leq Cd_n}} [Hb(\gamma_n r_i)]$.

Soit $\mathcal{C} = \{(\gamma_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}} \mid d(e, \gamma_n) \leq Cd_n\}$. Soit $\Gamma_i = \Gamma \cap U(r_i)$ et $\pi_i : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_i$.

On introduit la relation d'équivalence :

$$(\gamma_n) \sim_i (\gamma'_n) \Leftrightarrow \pi_i(\gamma_n) = \pi_i(\gamma'_n)\ \omega - \text{presque sûrement.}$$

On a alors la projection $\Pi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim_i = \mathcal{Q}_i$. On choisit $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{C}$ tel que $\Pi_i \mid_{\mathcal{S}_i} : \mathcal{S}_i \to \mathcal{Q}_i$ est une bijection. Il n'est pas difficile de voir que

$$\bigcup_{(\gamma_n)\in\mathcal{C}} [Hb(\gamma_n r_i)] = \bigcup_{(\gamma_n)\in\mathcal{S}_i} [Hb(\gamma_n r_i)].$$

De même $Con_\omega(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H(\gamma r_i)) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{(\gamma_n)\in\mathcal{S}_i} [H(\gamma_n r_i)]$, donc

$$Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{(\gamma_n)\in\mathcal{S}_i} [Hb(\gamma_n r_i)]. \tag{3.1}$$

L'ensemble limite $[\gamma_n r_i]$ est un rayon ρ dans $Con_\omega X$.

Proposition 3.10 ([Dr], lemme 4.2). *Soit X un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rayons dans X. Soit $Con_\omega(X,(x_n),(d_n))$ un cône asymptotique quelconque de X et soit $\rho = [r_n]$ le rayon limite. On note f_ρ la fonction de Busemann de ρ dans $Con_\omega(X,(x_n),(d_n))$ et f_{r_n} la fonction de Busemann de r_n dans $(X, \frac{1}{d_n}d)$. Alors on a les égalités suivantes*

$$(a)\qquad \lim_\omega f_{r_n}(y_n) = f_\rho(y)\ , \forall y = [y_n],$$

$$(b)\qquad [Hb(r_n)] = Hb(\rho), \rho = [r_n],$$

$$(c)\qquad [H(r_n)] = H(\rho).$$

D'après (3.1) et la proposition 3.10 on a $Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi \bigcup_{\rho\in R} Hb(\rho)$, où $R = \cup_{i=1}^k R_i$ et R_i est l'ensemble des rayons $\rho = [\gamma_n r_i]$, $(\gamma_n) \in \mathcal{S}_i$, et $\phi = \mathrm{id} : \bigcup_{\rho\in R} H(\rho) \to \bigcup_{\rho\in R} H(\rho)$

On peut déduire :

Proposition 3.11. *Le cône asymptotique de l'espace X_0 associé à Γ s'obtient comme :*

$$(3.2)\qquad Con_\omega X_0 = Con_\omega X \setminus \bigsqcup_{\rho\in R} Hbo(\rho),$$

où $R = \cup_{i=1}^k R_i$ et R_i est l'ensemble des rayons $\rho = [\gamma_n r_i]$, $(\gamma_n) \in \mathcal{S}_i$.

Preuve. Il reste à voir si les horoboules ouvertes qui apparaissent au (3.2) sont disjointes. Soit $x = [x_n] \in Hbo(\rho_1)$, $\rho_1 \in R$. On montre que $x \notin Hbo(\rho_2), \forall \rho_2 \in R \setminus \{\rho_1\}$. On a $\rho_1 = [r_n]$, $\rho_2 = [r'_n]$ et l'hypothèse $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1, \rho_2 \in R$, implique que r_n et r'_n sont non-asymptotiques ω-presque sûrement. Ceci et le théorème 3.4 **(1)** impliquent que $Hb(r_n) \cap Hb(r'_n) = \emptyset$ ω-presque sûrement.

Si $x \in Hbo(\rho_1)$ alors $f_{\rho_1}(x) = -a < 0$, ce qui, d'après la Proposition 3.10 (a), implique que $f_{r_n}(x_n) < -\frac{a}{2}$ ω-p.s. D'autre part, comme $Hb(r_n) \cap Hb(r'_n) = \emptyset$ ω-presque sûrement, $f_{r'_n}(x_n) \geq 0$ ω-presque sûrement. La Proposition 3.10 (a) permet à nouveau de conclure que $f_{\rho_2}(x) \geq 0$ et donc que x ne se trouve pas dans l'horoboule ouverte $Hbo(\rho_2)$. ♢

Désormais on note $\mathbf{K} = Con_\omega X$ et $\mathbf{K}_0 = Con_\omega X_0$. Avec cette notation et ce qu'on vient de démontrer, on peut réécrire

$$(3.3)\qquad \mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho\in R} Hbo(\rho).$$

On fixe un marquage sur $\partial_\infty X$. Soit $p : \partial_\infty X \to \Delta$ la projection associée à ce marquage. On a aussi un marquage induit sur $\partial_\infty \mathbf{K}$, et la projection associée $P : \partial_\infty \mathbf{K} \to \Delta$. Soit S le complexe de Coxeter modèle commun de $\partial_\infty X$ et de $\partial_\infty \mathbf{K}$ et soit $p_S : S \to \Delta$ la projection associée au marquage compatible aux deux marquages précédents.

Si (r_n) est une suite de rayons dans X telle que $p(r_n(\infty)) = \theta, \forall n$, le rayon limite $\rho = [r_n]$ satisfait $P(\rho(\infty)) = \theta$. Alors la Proposition 3.5 implique que $P(\{\rho(\infty) \mid \rho \in R\}) = \theta$, où R est l'ensemble de rayons de (3.3), et que pour deux rayons distincts de R, ρ_1 et ρ_2, $\rho_1(\infty)$ et $\rho_2(\infty)$ sont opposés.

4 Une estimation pour la fonction de remplissage

Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 dans un groupe semisimple G de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 3. Soit $X = G/K$ l'espace symétrique associé à G et soit S le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble sphérique $\partial_\infty X$.

Dans tout ce chapitre on suppose que la direction associée θ vérifie la propriété suivante :

($\mathbf{\Pi}$) *Pour tout $x \in S$ tel que $p_S(x) = \theta$, il n'y a aucun plat singulier Φ orthogonal à x, c'est-à-dire tel que $d_S(x, y) = \frac{\pi}{2}, \forall y \in \Phi$.*

Par exemple les groupes modulaires de Hilbert vérifient cette propriété d'après la Remarque 3.8. On peut trouver dans l'article de Tits ([**Ti**]$_2$), qui donne une classification des $\mathbb{Q}$-structures sur les groupes semisimples irréductibles, des exemples de réseaux de $\mathbb{Q}$-rang un qui ne la vérifient pas.

On essaie de trouver une estimation pour la fonction de Dehn de tels réseaux en appliquant le théorème 2.7. Il suffit donc de majorer l'ordre de la fonction de remplissage pour les cônes asymptotiques $Con_\omega(X_0, d)$ de X_0 avec la métrique induite, qui sont de la forme (3.3).

On a le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soient $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien de rang au moins 3, $\partial_\infty \mathbf{K}$ son bord à l'infini, qui est un immeuble sphérique, et $P : \partial_\infty \mathbf{K} \to \Delta$ la projection de cet immeuble sphérique sur une chambre modèle Δ. Soit $\theta \in \Delta$ un point qui vérifie la propriété (Π). Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de rayons géodésiques dans $\mathbf{K}$ tels que $P(\{\rho(\infty) \mid \rho \in \mathcal{R}\}) = \theta$ et $Hbo(\rho_1) \cap Hbo(\rho_2) = \emptyset$, $\forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}$, $\rho_1 \neq \rho_2$.*

Posons

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho \in \mathcal{R}} Hbo(\rho).$$

On suppose que par tout point $x \in \mathbf{K}_0$ passe un appartement entierement contenu dans $\mathbf{K}_0$. Alors la 1-fonction de remplissage (définition 2.4) de $\mathbf{K}_0$ satisfait

$$A_1(\ell) \leq C \cdot \ell^3, \, \forall \ell > 0,$$

où C est une constante qui ne dépend que de θ.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

4.1 Remplissage des courbes dans des intersections d'appartements avec des horosphères

Puisque $\mathbf{K}_0$ s'obtient en enlevant des horoboules ouvertes de $\mathbf{K}$, qui est un immeuble euclidien, on étudie dans la suite la forme que peut avoir l'intersection d'un appartement avec une horoboule dans un immeuble euclidien.

On a d'abord un résultat général :

Proposition 4.2. *Dans un immeuble euclidien de rang plus grand ou égal à 2, l'intersection entre une horoboule $Hb(\rho)$ et un appartement F est un polytope convexe dans F.*

Preuve. On introduit comme outil le rayon ρ^0 défini comme suit :

• si ρ a une direction régulière, $\rho^0 = \rho$,

• si ρ a une direction singulière, on choisit une chambre de Weyl de sommet $\rho(0)$ qui contient ρ et un rayon régulier ρ^0 dans cette chambre.

D'après le lemme 3.2 de [**Dr**], $\rho^0(\infty)$ a des opposés $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$ dans $F(\infty)$. Pour chaque $i \in \{1, 2 \ldots, k\}$, il existe un appartement unique F^i tel que $\rho^0(\infty), \alpha_i^0 \in F^i(\infty)$ et on a $F = \bigcup_{i=1}^{k} [F^i \cap F]$. Chaque $F^i \cap F$ est un polytope de Weyl convexe [**KlL**].

D'autre part, $Hb(\rho) \cap F = \bigcup_{i=1}^{k} [Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$. Mais $Hb(\rho) \cap F^i$ est un demi-appartement, donc $Hb(\rho) \cap F^i \cap F$ est toujours un polytope convexe.

Alors $\bigcup_{i=1}^{k} [Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$ est une reunion de polytopes convexes et aussi un ensemble convexe, donc c'est un polytope convexe.

$\diamondsuit$

Proposition 4.3. *Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien de rang plus grand ou égal à 2 et soit S le complexe de Coxeter modèle associé à l'immeuble sphérique $\partial_\infty \mathbf{K}$. Soit ρ un rayon dont la direction θ vérifie la propriété $(\mathbf{\Pi})$. Pour tout appartement F de $\mathbf{K}$ tel que $F \cap H(\rho) \neq \emptyset$, $F \cap H(\rho)$ est une hypersurface polytopique qui vérifie les propriétés suivantes :*

($\mathbf{P}_1$) *Si x et y sont des points de $F \cap H(\rho)$, on peut trouver dans $F \cap H(\rho)$ une ligne polygonale $\mathcal{L}(x, y)$ entre x et y, contenue dans un plan de F, telle que*

$$\text{long } \mathcal{L}(x, y) \leq kd(x, y),$$

où k est une constante qui ne dépend que de θ et de S.

($\mathbf{P}_2$) *Si le rang de l'immeuble est plus grand ou égal à 3, pour toute courbe $c : S^1 \to F \cap H(\rho)$ de longueur ℓ l'aire de remplissage $A_1(c)$ de c dans $F \cap H(\rho)$ vérifie l'inégalité $A_1(c) \leq b\ell^2$, où la définition de l'aire $A_1(c)$ est celle de la section 2.2.3 et où b est une constante qui ne dépend que de θ et de S.*

Preuve. Soit F un appartement tel que $F \cap Hb(\rho) \neq \emptyset$. Alors $\inf_F f_\rho \leq 0$, où f_ρ est la fonction de Busemann associée à ρ. On a $\inf_F f_\rho > -\infty$ ou $\inf_F f_\rho = -\infty$. On étudie chacun de ces deux cas.

(1) $\inf_F f_\rho = -\infty$

D'après [**Dr**], §3.1.3, dans ce cas il existe un rayon $[O, \beta) \subset F \cap Hb(\rho)$, $\beta \in F(\infty)$, sur lequel f_ρ decroît strictement. De plus, $d_T(\rho(\infty), \beta) \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, où d_T est la métrique de Tits et $\delta > 0$ est une constante qui ne dépend que de θ et de S. Soit $[O, \beta^{op})$ le rayon opposé à $[O, \beta)$ dans F. On considère le $\frac{\delta}{2}$-cône de sommet O autour de ce rayon, c'est-à-dire l'ensemble :

$$C\left(O, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) = \left\{y \in F; \measuredangle_O (y, \beta^{op}) \leq \frac{\delta}{2}\right\}.$$

On note O_t le point de $[O, \beta)$ tel que $f_\rho(O_t) = -t$. Alors on a

$$F = \bigcup_{t \geq 0} C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right).$$

Lemme 4.4 ([Dr], lemme 3.4). *On a les deux inclusions suivantes*

$$B(O_t, t) \cap F \subset Hb(\rho) \cap F \text{ et}$$

$$Hb(\rho) \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) \subset B(O_t, a't) \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right),$$

où a' ne dépend que de θ et de S.

Pour conclure, on utilise des résultats de géométrie euclidienne.

Lemme 4.5 ([Dr], lemme 3.5). *Soit $\mathcal{P}$ un polytope convexe dans un espace euclidien E, O un point à l'intérieur de $\mathcal{P}$, r un rayon issu de O et*

$$C(O, r, \delta_0) = \{P \in E \mid \measuredangle_O (OP, r) \leq \delta_0\}$$

un δ_0-cône de sommet O autour de r, où $\delta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Supposons qu'on a $B(O, R) \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap C(O, r, \delta_0) \subset B(O, aR) \cap C(O, r, \delta_0)$, où a est une constante. Soit $\mathcal{SP}$ l'hypersurface polytopique qui est le bord de $\mathcal{P}$. Alors:

a) *Si on munit $\mathcal{SP}$ et $S(O, R)$ des métriques de longueur, la projection radiale $pr : \mathcal{SP} \cap C(O, r, \delta_0) \to S(O, R) \cap C(O, r, \delta_0)$ est L-bilipschitz, où L ne dépend que de a.*

b) *Si on note d_ℓ la métrique de longueur sur $\mathcal{SP}$, on a*

$$d_\ell(x,y) \leq kd(x,y), \forall x,y \in \mathcal{SP} \cap C\left(O,r,\delta_0\right), \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

On représente le cas où E est de dimension 2 dans la Figure 1.

Figure 1

Ce lemme a une conséquence immédiate pour le cas des polytopes compacts:

Corollaire 4.6. *Soit $\mathcal{P}$ un polytope convexe compact dans un espace euclidien E et O un point à l'intérieur de $\mathcal{P}$. Supposons que $B(O,R) \subset \mathcal{P} \subset B(O,aR)$, où a est une constante. Soit $\mathcal{SP}$ le bord de $\mathcal{P}$. Alors:*

a) *Si on munit $\mathcal{SP}$ et $S(O,R)$ des métriques de longueur, la projection radiale $pr : \mathcal{SP} \to S(O,R)$ est L-bilipschitz, où L ne dépend que de a .*

b) *Si on note d_ℓ la métrique de longueur sur $\mathcal{SP}$, on a*

$$d_\ell(x,y) \leq kd(x,y), \forall x,y \in \mathcal{SP}, \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

On utilise ces résultats pour démontrer $(\mathbf{P}_1)$ et $(\mathbf{P}_2)$ dans le cas **(1)**.
$(\mathbf{P}_1)$ On considère $x,y \in F \cap H(\rho)$ et t suffisamment grand pour que $[x,y] \subset C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$. L'intersection $\mathcal{P} = F \cap Hb(\rho)$ est un polytope convexe tel que $B(O_t,t) \cap F \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) \subset B(O_t, a't) \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$.

Soit Φ le plan déterminé par les points x, y et O_t. Alors $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \Phi$ est un polygone convexe et $C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) \cap \Phi$ est un cône de sommet O_t autour de la projection r du rayon $[O_t, \beta^{op})$ sur Φ. On note ce cône $C(O_t, r, \delta_0)$. On a $B(O_t,t) \cap \Phi \subset \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}' \cap C\left(O_t, r, \delta_0\right) \subset B(O_t, a't) \cap C\left(O_t, r, \delta_0\right)$.

On applique le Lemme 4.5 **b)**.
$(\mathbf{P}_2)$ Soit $c : S^1 \to F \cap H(\rho)$ une courbe de longueur ℓ. On considère t suffisamment grand pour que $c(S^1) \subset C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$ et on utilise le Lemme 4.5 **a)** et le fait qu'il existe une constante universelle b_0 telle que si c est une courbe de longueur ℓ sur une sphère, on a $A_1(c) \leq b_0 \ell^2$.

(2) $\inf\limits_F f_\rho = -\mu > -\infty$

On choisit un rayon auxilliaire ρ^0 comme dans la preuve de la proposition 4.2. Soient $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$ les opposés de $\rho(\infty)$ dans $F(\infty)$. Pour chaque $i \in \{1, 2 \dots, k\}$, soit F^i l'unique appartement tel que $\rho^0(\infty), \alpha_i^0 \in F^i(\infty)$. On a $F = \bigcup_{i=1}^{k} [F^i \cap F]$.

Alors $\inf_F f_\rho = \min\{\inf_{F\cap F_1} f_\rho, \inf_{F\cap F_2} f_\rho, \dots \inf_{F\cap F_k} f_\rho\}$. Il en résulte que $\inf_{F\cap F_i} f_\rho = -\mu$, pour un $i \in \{1, 2, \dots k\}$ et il n'est pas difficile de voir que la valeur $-\mu$ est effectivement atteinte en au moins un point de $F \cap F_i$. Dans la suite on étudie l'ensemble $\{O \in F \mid f_\rho(O) = -\mu\}$.

Lemme 4.7. *L'ensemble $\{O \in F \mid f_\rho(O) = -\mu\}$ contient un seul point.*

Preuve. Supposons qu'on a au moins deux points dans cet ensemble, O et O_1 . Comme le segment $[O, O_1]$ est contenu dans F et f_ρ est convexe, on a $f_\rho(x) = -\mu, \forall x \in [O, O_1]$. D'après le lemme 3.7 de [**Dr**], le segment $[O, O_1]$ se trouve dans un plat singulier. Donc, si on fixe un $x \in (O, O_1)$, le sous-segment $(x, O]$ est contenu dans l'intérieur d'un mur de chambre de Weyl de sommet x. On note ce mur M. On note ρ_x le rayon issu de x asymptotique à ρ et $\overline{\rho_x}$ sa direction en x. L'ensemble des directions $M_x = \{\overline{xy}\,;\, y \in M\backslash\{x\}\}$ est un mur dans l'immeuble sphérique $\Sigma_x\mathbf{K}$. Le fait que, pour tout $y \in M, f_\rho(y) \geq -\mu$ entraîne que $<_x (\overline{\rho_x}, \overline{xy}) \geq \frac{\pi}{2}, \forall y \in M\backslash\{x\}$. Le fait que f_ρ est constante sur $[x, O]$ implique $<_x (\overline{\rho_x}, \overline{xO}) = \frac{\pi}{2}$. Aussi, la direction $\overline{xO}$ est un point intérieur du mur M_x. La Proposition 2.10 (ii) de [**Dr**] implique alors que $<_x (\overline{\rho_x}, \overline{xy}) = \frac{\pi}{2}, \forall \overline{xy} \in M_x$ et que, dans l'appartement F'_x de $\Sigma_x\mathbf{K}$ qui contient à la fois $\overline{\rho_x}$ et M_x, $\overline{\rho_x}$ est orthogonal au plat singulier minimal Φ_x qui contient M_x. Or F'_x est isomorphe à S et $p_x(\overline{\rho_x}) = \theta$, donc ceci contredit la propriété (Π) de θ.

On conclut que le point O de F qui minimise f_ρ est unique. $\diamondsuit$

On note ρ_O le rayon issu de O asymptotique à ρ. L'inégalité $|f_\rho(x) - f_\rho(y)| \leq d(x, y)$ entraîne que $B(O, \mu) \subset F \cap Hb(\rho)$.

Dans $\Sigma_O\mathbf{K}$ on considère l'appartement $F_O = \{\overline{Ox} \mid x \in F \setminus \{O\}\}$. A cause du fait que O est un minimum strict de f_ρ sur F, toutes les directions de F_O font avec ρ_O un angle $> \frac{\pi}{2}$. Donc chaque chambre $W_O \subset F_O$, dans l'appartement $F'_O \subset \Sigma_O\mathbf{K}$ qui contient W_O et $\overline{\rho_O}$, vérifie $d_O(\overline{\rho_O}, W_O) > \frac{\pi}{2}$. D'après la Remarque 2.9 de [**Dr**] ceci entraîne que

$$d_O(\overline{\rho_O}, W_O) \geq \frac{\pi}{2} + \delta',$$

où $\delta' > 0$ ne dépend que de θ et de S. Ainsi toutes les directions de F_O font avec $\overline{\rho_O}$ un angle $\geq \frac{\pi}{2} + \delta'$. Ceci et le lemme 4.12 de [**KlL**] entraînent que pour tout rayon $r \subset F$ issu de O la fonction convexe $f_\rho \circ r$ possède, au voisinage de zéro, une vitesse de croissance plus grande que $\sin\delta'$. D'où $f_\rho \circ r(t) \geq -\mu + t \cdot \sin\delta',\ \forall t > 0$. Alors, si y est le point du rayon r qui se trouve sur $H(\rho)$, il doit vérifier la relation $-\mu + d(O,y)\cdot \sin\delta' \leq 0$, donc $d(O,y) \leq \frac{\mu}{\sin\delta'}$.

On a obtenu $B(O,\mu) \subset F \cap Hb(\rho) \subset B(O, \frac{\mu}{\sin\delta'})$. Le corollaire 4.6 permet alors de conclure que dans ce cas aussi $F \cap H(\rho)$ vérifie les propriétés $(\mathbf{P}_1)$ et $(\mathbf{P}_2)$.

4.2 Cylindre sur un lacet dans une direction régulière

On commence la preuve du théorème 4.1. Soit $c : S^1 \to \mathbf{K_0}$ une courbe de longueur $\ell \geq 1$ paramétrée proportionnellement à la longueur. On veut prouver que $A_1(c) \leq C\ell^3$, où C est une constante positive qui ne dépend que de θ.

4.2.1 Première étape. On réduit le problème de remplissage de c au remplissage d'une courbe c' qui se trouve dans une réunion finie d'appartements. On utilise, pour construire c', le résultat suivant :

Lemme 4.8. *Soit $F \subset \mathbf{K}$ un appartement et A et B deux points dans $F \cap \mathbf{K_0}$. Il existe une ligne polygonale $\mathcal{L}(A,B)$ entre A et B dans $F \cap \mathbf{K_0}$ de longueur plus petite que $k \cdot d(A,B)$, où k est la constante de la Proposition 4.3,* $(\mathbf{P}_1)$.

Preuve. On obtient $\mathcal{L}(A,B)$ à partir de la géodésique $[A,B]$ en remplaçant chaque sous-segment $[x,y]$ de $[A,B]$ qui traverse une horoboule $Hb(\rho), \rho \in \mathcal{R}$, par une ligne polygonale $\mathcal{L}(x,y) \subset H(\rho) \cap F$ de longueur plus petite que $k \cdot d(x,y)$. On peut faire ceci d'après $(\mathbf{P}_1)$. $\diamondsuit$

On choisit une suite de points $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ de S^1 qui détermine une partition de S^1 telle que, si $P_i = c(Q_i)$, la longueur de l'arc de c compris entre P_i et P_{i+1} est plus petite que λ, où λ est une constante suffisamment petite. On voit que $n \leq \frac{2\ell}{\lambda}$. Chaque géodésique $[P_i, P_{i+1}]$ se trouve dans un appartement F_i. Dans F_i on la remplace par une ligne polygonale $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(P_i, P_{i+1})$ comme dans le lemme précédent. On a $\mathrm{long}(\mathcal{L}_i) \leq k\lambda$. On note c' la courbe obtenue comme réunion des $\mathcal{L}_i$. On voit que $\mathrm{long}(c') \leq k\ell$. Si λ est suffisamment petit, $\mathcal{L}_i$ et l'arc de c compris entre P_i et P_{i+1} forment une maille de longueur plus petite que 1 et on a donc :

$$A_1(c) \leq n + A_1(c') \leq \frac{2}{\lambda}\ell + A_1(c').$$

Il suffit donc de montrer que c' a un remplissage au plus cubique.

4.2.2 Deuxième étape. Dans la suite on réduit le remplissage de c' au remplissage d'une couronne.

Par chaque point de $\mathbf{K_0}$ passe un appartement entièrement contenu dans $\mathbf{K_0}$. Soit $F \subset \mathbf{K_0}$ un tel appartement qui passe par P_0. Soit W une chambre de Weyl dans F de sommet P_0. On va choisir un rayon issu de P_0 dans W ayant une direction régulière spéciale, donnée par le lemme suivant.

Lemme 4.9. *Soit un point q dans le complexe de Coxeter modèle S de $\partial_\infty \mathbf{K}$, tel que $p_S(q) = \theta$, où $p_S : S \to \Delta$ est la projection sur la chambre modèle,* *et soit* $\mathcal{H} = \{p \in S; d_S(p,q) = \frac{\pi}{2}\}$ *l'hyperplan orthogonal à* q. *Il existe un* $\beta \in \mathrm{Int}\Delta$ *tel que* $d(\beta, \partial\Delta) \geq \delta_0$ *et* $d(\beta, p_S(\mathcal{H})) \geq \delta_0$, *où* δ_0 *ne dépend que de* S *et de* θ.

Preuve. C'est la conséquence immédiate du fait que $p_S(\mathcal{H})$ est un sous-ensemble de codimension 1 de Δ. $\diamondsuit$

L'intérêt d'avoir une telle direction découle du résultat suivant :

Lemme 4.10. *Soit* ρ *un rayon de* $\mathbf{K}$ *de direction* θ *et soit* $[x,y]$ *un segment géodésique de* $\mathbf{K}$. *Si* $p_x(\overline{xy}) = \beta$, *alors il existe un sous-segment géodésique* $[x,y'] \subset [x,y]$, $x \neq y'$, *sur lequel* f_ρ *croît ou décroît strictement avec une vitesse plus grande que* $\sin\delta_0$.

Preuve. Soit $\rho_x = [x, \rho(\infty))$. Soit F_x l'appartement de $\Sigma_x\mathbf{K}$ qui contient $\overline{xy}$ et $\overline{\rho_x}$. L'angle $<_x (\overline{xy}, \overline{\rho_x})$ est la distance entre $\overline{xy}$ et $\overline{\rho_x}$ dans l'immeuble sphérique $\Sigma_x\mathbf{K}$, qui coïncide avec la distance dans F_x. Comme F_x est isomorphe à S et $p_x(\overline{xy}) = \beta$, $p_x(\overline{\rho_x}) = \theta$, l'angle $<_x (\overline{xy}, \overline{\rho_x})$ se trouve dans l'ensemble fini de distances :

$$\delta(\beta,\theta) = \{d_S(x_1,x_2) \mid x_1, x_2 \in S, p_S(x_1) = \theta, p_S(x_2) = \beta\} \ .$$

D'après le choix de β, si on écrit les éléments de $\delta(\beta,\theta)$ en ordre croissant, on a deux éléments consécutifs de la forme $\frac{\pi}{2} - \delta_1$, $\frac{\pi}{2} + \delta_2$ où $\delta_1 \geq \delta_0, \delta_2 \geq \delta_0$. Par conséquent, ou bien $<_x (\overline{xy}, \overline{\rho_x}) \leq \frac{\pi}{2} - \delta_0$ ou bien $<_x (\overline{xy}, \overline{\rho_x}) \geq \frac{\pi}{2} + \delta_0$. D'après le lemme 4.1.2 de [**KlL**], il existe un $[x,y'] \subset [x,y]$, $x \neq y'$, qui délimite avec ρ_x une bande euclidienne. On voit alors que sur $[x,y']$, f_ρ croît ou décroît avec une vitesse $\geq \sin\delta_0$.

$\diamondsuit$

On choisit un rayon r issu de P_0 dans W ayant la direction β. On note $b = r(\infty)$. On construit un cylindre sur c' de direction b. Pour tout point $Q \in c'$ on prend le rayon $r_Q = [Q, b)$. D'après [**KlL**], lemme 4.6.3, r_Q est contenu dans F à partir d'un point $M_Q \in r_Q$ qui se trouve à une distance $d(Q, M_Q) \leq \frac{d(Q,F)}{\sin\delta_0} \leq \frac{k\ell}{\sin\delta_0}$. Evidemment, le rayon $[M_Q, b) \subset r_Q$ est parallèle à r dans F. Aussi

$$d(P_0, M_Q) \leq d(P_0, Q) + d(Q, M_Q) \leq k\ell(1 + \frac{1}{\sin\delta_0}) \ .$$

Alors si on considère dans F l'hyperplan orthogonal à r situé à distance $k\ell \cdot (1 + \frac{1}{\sin\delta_0})$ de P_0, cet hyperplan coupe chaque r_Q en un point N_Q. Pour deux points Q_1, Q_2 de c', la fonction $t \to d(r_{Q_1}(t), r_{Q_2}(t))$ est convexe et décroissante. Alors $d(r_{Q_1}(t), r_{Q_2}(t)) \leq d(Q_1, Q_2)$.
D'où

$$d(N_{Q_1}, N_{Q_2}) \leq d(Q_1, Q_2) \,. \tag{4.1}$$

Si on paramétrise c' proportionellement à la longueur d'arc, on obtient une fonction $c' : S^1 \to \mathbf{K_0}$ qui est $\frac{k\ell}{4}$ -lipschitzienne. On peut lui associer la courbe $c'' : S^1 \to \mathbf{K_0}, c''(t) = N_{c'(t)}$ toujours $\frac{k\ell}{4}$ -lipschitzienne, donc de longueur au plus $\frac{\pi}{2} \cdot k\ell$ (voir la Figure 2).

Figure 2

On a aussi

$d(Q, N_Q) \leq d(N_Q, N_{P_0}) + d(N_{P_0}, P_0) + d(P_0, Q) \leq k\ell \cdot (1 + \frac{1}{\sin \delta_0}) + 2k\ell,$

donc

$$d(Q, N_Q) \leq c_1 \ell, \text{ où } c_1 = k \cdot \left(3 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right). \tag{4.2}$$

Il est évident que $A_1^{\mathbf{K_0}}(c'') = A_1^F(c'') \leq \text{constante} \times \ell^2$. Donc pour remplir c' il reste à remplir la "couronne" formée par c' et c''.

4.3 Une estimation de la fonction de Dehn pour l'espace $\mathbf{K_0}$

On finit la preuve du théorème 4.1 en remplissant la "couronne" formée par c' et c''.

On rappelle que c' est formée par les lignes polygonales $\mathcal{L}_i$ se trouvant, chacune, dans un appartement F_i. On fixe un $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Le point $b = r(\infty) \in \partial_\infty \mathbf{K}$ a un nombre fini d'opposés dans $F_i(\infty)$, $\{b_1^i, b_2^i \ldots b_{k_i}^i\}$, où k_i est borné par le nombre q_0 de chambres d'un appartement de $\partial_\infty \mathbf{K}$. Si F_l^i est l'unique appartement dont le bord à l'infini contient b et b_l^i, alors $F_i = \bigcup_{l=1}^{k_i} (F_i \cap F_l^i)$ (lemme 3.2, [**Dr**]). Ainsi la ligne $\mathcal{L}_i$ est partitionnée en au plus q_0 parties telles que chaque partie se trouve dans un F_l^i. On obtient ainsi une nouvelle partition de c'. On va noter les points qui déterminent la nouvelle partition de c' par $R_0 = P_0, R_1, R_2 \ldots R_m$, où $m \leq nq_0 \leq \frac{2q_0}{\lambda} \cdot \ell$. On note $N_j = N_{R_j}$.

Pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ l'arc $R_j - R_{j+1}$ se trouve dans un même appartement F_j qui contient b dans son bord à l'infini. L'appartement F_j contient donc $r_Q = [Q, b)$ pour tout Q dans l'arc $R_j - R_{j+1}$, donc aussi l'arc $N_j - N_{j+1}$ de c''. La longueur de $R_j - R_{j+1}$ est plus petite que $k\lambda$, de même pour $N_j - N_{j+1}$, à cause de (4.1). On remarque aussi que les appartements consécutifs F_{j-1} et F_j ont en commun le point R_j et le point b à l'infini, donc aussi le rayon $[R_j, b)$ et l'unique chambre de Weyl de sommet R_j qui contient ce rayon.

Dans chaque F_j, on remplace le segment géodésique $[R_j, N_j]$ par la ligne polygonale $\ell_j = \mathcal{L}(R_j, N_j) \subset \mathbf{K_0} \cap F_j$ et on remplace $[R_{j+1}, N_{j+1}]$ par la ligne polygonale $\ell'_{j+1} = \mathcal{L}'(R_{j+1}, N_{j+1}) \subset \mathbf{K_0} \cap F_j$. On a donc entre chaque R_j et N_j deux lignes polygonales : $\ell'_j = \mathcal{L}'(R_j, N_j) \subset \mathbf{K_0} \cap F_{j-1}$ et $\ell_j = \mathcal{L}(R_j, N_j) \subset \mathbf{K_0} \cap F_j$. On a l'estimation suivante pour la longueur de chaque ℓ_j : $\mathrm{long}(\ell_j) \leq k \cdot d(R_j, N_j) \leq k \cdot c_1 \cdot \ell = c_2 \ell.$

De même pour ℓ'_j.

Le remplissage de la “couronne” formée par c' et c'' se fait en deux pas :

- on remplit chaque “bande” c_j formée par les arcs de courbe $R_j - R_{j+1}$ et $N_j - N_{j+1}$ et les lignes polygonales ℓ_j et ℓ'_{j+1}, et qui se trouve dans le même appartement F_j.
- on remplit chaque courbe $\gamma_j = \ell_j \cup \ell'_j$.

4.3.1 Troisième étape. On remplit chaque “bande” c_j formée par $R_j - R_{j+1}$, $N_j - N_{j+1}$, ℓ_j et ℓ'_{j+1}.

Soit $Hb(\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$, une horoboule telle que $Hb(\rho) \bigcap \{[R_j, N_j] \cup [R_{j+1}, N_{j+1}]\} \neq \emptyset$. Supposons que $Hb(\rho) \cap [R_j, N_j] = [x, y]$ et $Hb(\rho) \cap [R_{j+1}, N_{j+1}] = [x', y']$. On montre que les longueurs des deux segments sont du même ordre.

Lemme 4.11. *On a les inégalités*

$$\frac{1}{L_1}[d(x, y) - 2k\lambda] \leq d(x', y') \leq L_1[d(x, y) + 2k\lambda], \tag{4.3}$$

où $L_1 \geq 1$ est une constante qui dépend seulement de β et de θ.

Remarque 4.12. *Dans ce lemme, on prend aussi en compte le cas où un des deux segments $[x, y], [x', y']$ est vide. Dans ce cas on prend $d(x, y) = 0$ ou $d(x', y') = 0$ dans la relation* (4.3).

Preuve. Le fait essentiel est que les segments $[R_j, N_j]$ ont la direction β. Soient $m = \inf\limits_{[R_j, N_j]} f_\rho$ et $m' = \inf\limits_{[R_{j+1}, N_{j+1}]} f_\rho$.

- Les minima m et m' sont atteints en des points uniques, $z \in [R_j, N_j]$ et $z' \in [R_{j+1}, N_{j+1}]$, respectivement.

Sinon on a un sous-segment $[P, Q] \subset [R_j, N_j]$ sur lequel f_ρ est constante égale à m. Ceci et le lemme 4.1.2 de [**KlL**] impliquent alors que $<_P (\overline{PQ}, \overline{\rho_P}) = \frac{\pi}{2}$, où $\rho_P = [P, \rho(\infty))$. D'autre part $p_P(\overline{PQ}) = \beta$, $p_P(\{\bar{u} \in \Sigma_P \mathbf{K} \mid <_P (\bar{u}, \overline{\rho_P}) = \frac{\pi}{2}\} = p_S(\mathcal{H})$. Or $\beta \notin p_S(\mathcal{H})$.

- Soient z et z' les points où le minimum de f_ρ est atteint (qui sont à l'intérieur des segments $[x, y]$ et $[x', y']$ si ceux-ci sont non-vides). On a $z = t \cdot R_j + (1-t) \cdot N_j$, $t \in (0, 1)$. Si on choisit sur $[R_{j+1}, N_{j+1}]$ le point $\tilde{z} = t \cdot R_{j+1} + (1-t) \cdot N_{j+1}$, on a

$$d(z, \tilde{z}) \leq t \cdot d(R_j, R_{j+1}) + (1-t) \cdot d(N_j, N_{j+1}) \leq k\lambda.$$

Alors $f_\rho(\tilde{z}) < f_\rho(z) + d(z, \tilde{z}) \leq m + k\lambda$, d'où $m' \leq m + k\lambda$. De même on obtient $m \leq m' + k\lambda$, donc :

$$m - k\lambda \leq m' \leq m + k\lambda \tag{4.4}$$

• L'inégalitéé $f_\rho(x) - f_\rho(z) \leq d(x, z)$ implique que $d(x, z) \geq -m$. De même pour y, et finalement on obtient $d(x, y) \geq -2m$. D'autre part, le fait que f_ρ croît sur $[z, x]$ et le Lemme 4.10 impliquent que f_ρ croît, le long de $[z, x]$, au moins avec la vitesse $\sin\delta_0$. D'où

$$0 = f_\rho(x) \geq f_\rho(z) + \sin\delta_0 \cdot d(x, z) \geq m + \sin\delta_0 \cdot d(x, z).$$

Donc $d(x, z) \leq -\frac{m}{\sin\delta_0}$. De même $d(y, z) \leq -\frac{m}{\sin\delta_0}$, donc finalement :

$$-2m \leq d(x, y) \leq -\frac{2m}{\sin\delta_0}. \tag{4.5}$$

Un raisonnement similaire nous donne la suite d'inégalités

$$-2m' \leq d(x', y') \leq -\frac{2m'}{\sin\delta_0}.$$

Alors $d(x', y') \leq -\frac{2m'}{\sin\delta_0} \leq -\frac{2m-2k\lambda}{\sin\delta_0} \leq \frac{d(x,y)+2k\lambda}{\sin\delta_0} = L_1[d(x, y) + 2k\lambda]$, où $L_1 = \frac{1}{\sin\delta_0}$. De même pour la deuxième inégalitéé. $\diamondsuit$

Si $d(x, y) < \frac{2k\lambda}{\sin\delta_0}$ et $d(x', y') < \frac{2k\lambda}{\sin\delta_0}$, alors on ignore cette horoboule, car les perturbations qu'elle va apporter au remplissage de la bande seront de l'ordre de λ, donc négligeables. Si l'une des deux distances est plus grande ou égale à $\frac{2k\lambda}{\sin\delta_0}$, on prend celle qui est maximale. Supposons que c'est $d(x, y)$.

Avec les notations introduites dans la preuve du lemme précédent, la relation (4.5) implique que $m \leq -d(x, y) \cdot \frac{\sin\delta_0}{2} \leq -k\lambda$ et la relation (4.4) entraîne que $m' \leq m + k\lambda \leq 0$. Donc le segment $[x', y']$ n'est pas vide. On démontre que le quadrilatère géodésique de sommets x, y, y', x' a un périmètre d'ordre $d(x, y)$.

Si $x = t \cdot N_j + (1 - t) \cdot R_j$ et si on considère sur $[R_{j+1}, N_{j+1}]$ le point $\tilde{x} = t \cdot N_{j+1} + (1-t) \cdot R_{j+1}$, on a $d(x, \tilde{x}) \leq t \cdot d(N_j, N_{j+1}) + (1-t) \cdot d(R_j, R_{j+1}) \leq k\lambda$, d'où $|f_\rho(\tilde{x})| \leq k\lambda$.

Si $-k\lambda \leq f_\rho(\tilde{x}) \leq 0$, alors f_ρ est strictement croissante sur un des deux segments $[\tilde{x}, x']$ ou $[\tilde{x}, y']$. Supposons qu'elle croît sur $[\tilde{x}, x']$. Le Lemme 4.10 implique qu'elle croît au moins avec la vitesse $\sin\delta_0$. Alors :

$$0 = f_\rho(x') \geq f_\rho(\tilde{x}) + d(x', \tilde{x}) \cdot \sin\delta_0 \Rightarrow d(x', \tilde{x}) \leq \frac{-f_\rho(\tilde{x})}{\sin\delta_0} \leq \frac{k\lambda}{\sin\delta_0}.$$

Si $0 \leq f_\rho(\tilde{x}) \leq k\lambda$, alors f_ρ décroît sur $[\tilde{x}, x']$ et un raisonnement similaire implique la même majoration pour $d(x', \tilde{x})$. On obtient finalement :

$$d(x, x') \leq k\lambda\left(1 + \frac{1}{\sin\delta_0}\right) = c_3\lambda. \tag{4.6}$$

On fait le même raisonnement pour y et on trouve que

$$(4.7) \qquad d(y,y') \leq c_3\lambda \qquad \text{ou} \qquad (4.8) \qquad d(y,x') \leq c_3\lambda\ .$$

Si on est dans le cas (4.8) on refait le raisonnement pour y' et on retrouve (4.7) ou :

$$(4.9) \qquad d(y',x) \leq c_3\lambda$$

Si pour y' aussi on est dans le cas (4.9), alors cette relation-ci avec (4.6) et (4.8) impliquent que $d(y,y') \leq 3c_3\lambda$. Donc, en tout cas, on aura les relations (4.6) et (4.7) avec une constante c_3 éventuellement triplée.

Ainsi le quadrilatère géodésique de sommets x, y, y', x' a pour périmètre : $d(x,y) + d(y,y') + d(x',y') + d(x,x') \leq d(x,y) + 2c_3\lambda + L_1 d(x,y) + 2kL_1\lambda \leq 2L_1 d(x,y) + 2c_3\lambda + 2kL_1\lambda \leq c_4 d(x,y)$, car $d(x,y) \geq \frac{2k\lambda}{\sin\delta_0}$.

Si on remplace les géodésiques par des lignes polygonales dans $F_i \cap H(\rho)$, comme dans le Lemme 4.8, on obtient une courbe dans $F_i \cap H(\rho)$, qui passe par x, y, y', x' de longueur $\leq kc_4 d(x,y)$. Comme chacune des hypersurfaces polytopiques $F \cap H(\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$, vérifie la propriété $\mathbf{(P_2)}$ de la Proposition 4.3, cette courbe peut être remplie par une aire plus petite ou égale à $b[kc_4 d(x,y)]^2 = c_5 d^2(x,y)$. (On peut faire ceci seulement si $F \cap H(\rho)$ est de dimension au moins 2, donc si le rang de l'immeuble $\mathbf{K}$ est au moins 3). Donc pour remplir toutes ces courbes fermées passant par des x, y, y', x', où $[x,y] = Hb(\rho) \cap [R_j, N_j]$ et $[x', y'] = Hb(\rho) \cap [R_{j+1}, N_{j+1}]$, le long de $[R_j, N_j]$, on a besoin d'une aire $\leq c_5 \sum\limits_{(x,y)} d^2(x,y) \leq c_5 d^2(R_j, N_j) \leq C\ell^2$, d'après (4.2).

En traitant le cas symétrique où $d(x',y') \geq d(x,y)$ on obtient encore une aire $\leq C\ell^2$.

Après avoir rempli tous les "quadrilatères" de type $x - y - y' - x'$ correspondant à des diverses horosphères, il reste des segments disjoints $[x, \bar{y}] \subset [R_j, N_j]$ et $[x', \bar{y}'] \subset [R_{j+1}, N_{j+1}]$ entièrement contenus dans $\mathbf{K_0} \cap F_j$ groupés dans des paires $[x, \bar{y}]$, $[x', \bar{y}']$, tels que les extrémités sont jointes deux à deux par des lignes polygonales dans $\mathbf{K_0}$ de longueur $\leq kc_3\lambda$ (voir la Figure 3).

Figure 3

On voit qu'un tel "quadrilatère" $x - x' - \bar{y}' - \bar{y}$ peut être rempli par une aire d'ordre $d(x, \bar{y})$ et en sommant l'aire de tous ces "quadrilatères" on obtient une aire $\leq C_1\ell$. On peut conclure que pour remplir la "bande" $R_j - N_j - N_{j+1} - R_{j+1}$ on a besoin d'une aire $\leq 2C\ell^2 + C_1\ell \leq C_0\ell^2$.

4.3.2 QUATRIÈME ÉTAPE. On remplit les courbes $\gamma_j = \ell'_j \cup \ell_j$.
On rappelle que ℓ_j s'obtient en remplaçant, le long du segment géodésique $[R_j, N_j]$, chaque sous-segment $[x, y] = [R_j, N_j] \cap Hb(\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$, par une ligne polygonale $\mathcal{L}(x, y)$ dans $H(\rho) \cap F_j$, et ℓ'_j s'obtient en remplaçant chaque $[x, y]$ par une ligne polygonale $\mathcal{L}'(x, y)$ dans $H(\rho) \cap F_{j-1}$. Donc c'est seulement entre de tels x et y que ℓ_j et ℓ'_j diffèrent. Ainsi il suffit de remplir la courbe formée par chaque paire de lignes polygonales $\mathcal{L}(x, y)$ et $\mathcal{L}'(x, y)$. Pour ce faire on a le lemme suivant :

Lemme 4.13. *Soient F et F' deux appartements qui ont en commun une chambre de Weyl W de sommet R, soit r un rayon dans W issu de R et soit $[x, y] = r([0, \infty)) \cap Hb(\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y)$ est une ligne polygonale entre x et y dans $F \cap H(\rho)$ construite comme dans* $(\mathbf{P}_1)$*, Proposition 4.3, et $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(x, y)$ est une ligne polygonale similaire dans $F' \cap H(\rho)$, pour la courbe $\gamma = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ on a*

$$A_1^{\mathbf{K_0}}(\gamma) \leq c_8 \cdot d^2(x, y). \tag{4.10}$$

Preuve.
Les deux propriétés principales de $\mathcal{L}$ dans F et de $\mathcal{L}'$ dans F' sont :
(π_1) $\operatorname{long}(\mathcal{L}) \leq kd(x, y)$;
(π_2) $\mathcal{L}$ se trouve dans un plan de F qui contient $[x, y]$, donc qui contient la droite xy, et aussi r. Dans ce plan elle est contenue dans une ligne polygonale qui délimite un domaine convexe.

La propriété (π_1) nous montre qu'on peut réduire la preuve de l'inégalitéé (4.10) à la preuve de l'inégalitéé

$$A_1^{\mathbf{K_0}}(\gamma) \leq c_8 \cdot (\operatorname{long}(\gamma))^2.$$

Soit $t \to x'_t$, $t \in [0, a]$, $x'_0 = x$, un paramétrage de $\mathcal{L}'$ et soit r'_t l'unique rayon issu de R dans F' qui contient le segment $[R, x'_t]$. La propriété (π_2) implique que l'ensemble $\bigcup_{t \in [0,a]} r'_t$ est un secteur plan de sommet R dans F' et l'ensemble $\{r'_t(\infty) \mid t \in [0, a]\}$ est une géodésique dans $F'(\infty)$ entre $r(\infty)$ et un point α'. On remarque que tous les rayons r'_t, sauf ceux qui coïncident avec $[R, \alpha')$, rencontrent $\mathcal{L}'$ en deux points. Le rayon $[R, \alpha')$ peut rencontrer $\mathcal{L}'$ selon un point ou un segment.

Soit σ' le simplexe de l'appartement $F'(\infty)$ qui contient α' dans son intérieur.

Il existe dans $F'(\infty)$ une galerie d'origine $\mathcal{W} = W(\infty)$ et de longueur minimale qui contient la géodésique $[r(\infty), \alpha']$. Cette galerie est aussi une galerie minimale entre $\mathcal{W}$ et σ'.

On démontre par récurrence :

(P_q) Avec les hypothèses du lemme et les notations introduites auparavant, si la longueur de la galerie minimale entre $\mathcal{W}$ et σ' est q, alors

$$A_1^{\mathbf{K_0}}(\gamma) \leq c_q \cdot \ell^2 \, ,$$

où $\ell = \mathrm{long}(\gamma)$ et c_q est la suite croissante de premier terme $c_1 = b$ qui vérifie la relation de récurrence $c_{q+1} = (b + c_q)(1 + k)^2$ (b est la constante qui apparaît dans la Proposition 4.3 ($\mathbf{P}_2$)).

L'outil principal est le sous-lemme suivant :

Sous-lemme 4.14. *Soit* $\mathbf{K}$ *un immeuble euclidien,* D *un demi-appartement de* $\mathbf{K}$ *et soit* W *une chambre de Weyl qui a un mur de codimension 1 inclus dans le bord de* D*. Il existe un unique appartement qui contient à la fois* D *et* W*.*

Preuve. Soit R le sommet de W. Dans $\Sigma_R \mathbf{K}, D_R = \{\overline{Ry} \mid y \in D \setminus \{R\}\}$ est un demi-appartement et W_R est une chambre qui a un mur de codimension 1 dans ∂D_R. D'après la preuve de la Proposition 3.27 de [**Ti**]$_1$, il existe dans D_R une chambre W_R^{op} opposée à W_R.
Soit r un rayon régulier dans W issu de R. Alors $\overline{r_R}$ a un opposé $\overline{r_R^{op}}$ dans W_R^{op}, et si on considère le rayon r^{op} de W^{op} déterminé par cette direction, il forme avec r une géodésique régulière g. L'appartement F qui contient g contient W et W^{op}, donc contient ∂D, car ∂D est l'enveloppe convexe des deux murs de codimension 1 de W et W^{op} qui s'y trouvent. Alors F contient aussi D car D est l'enveloppe convexe de ∂D et de W^{op}. $\diamondsuit$

On démontre (P_1) :
Dans ce cas $\mathcal{L}'$ est incluse dans W, donc $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ se trouvent dans le même appartement et on a

$$A_1^{\mathbf{K_0}}(\gamma) \leq b\ell^2 = c_1\ell^2.$$

Supposons que (P_q) est vraie. On démontre (P_{q+1}).
Soit $\mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \ldots, \mathcal{W}_q$ la galerie minimale qui contient $[r(\infty), \alpha']$ dans $F'(\infty)$. Soit W_i la chambre de Weyl de F' de sommet R et de bord à l'infini $\mathcal{W}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$. On a $\mathcal{L}' \subset W \cup W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_q$. La chambre W_1 est adjacente à W selon un mur M de codimension 1. La géodésique $[r(\infty), \alpha']$ rencontre $M(\infty)$. Alors $\mathcal{L}'$ rencontre M en deux points, x_1 et y_1. Soit $\mathcal{L}_1'$ l'arc de $\mathcal{L}'$ compris entre x_1 et y_1, donc contenu dans F'. On a $\mathrm{long}(\mathcal{L}_1') \leq \mathrm{long}(\mathcal{L}') \leq \ell$, donc $d(x_1, y_1) \leq \ell$. Soit aussi $\mathcal{L}_1'' = \gamma - \mathcal{L}_1'$ qui a $\mathrm{long}(\mathcal{L}_1'') \leq \ell$.

Soit $\mathcal{L}_1$ la ligne polygonale entre x_1 et y_1 dans $F \cap H(\rho)$ construite comme dans la Proposition 4.3. Sa longueur vérifie :

$$\mathrm{long}(\mathcal{L}_1) \leq kd(x_1, y_1) \leq k\ell.$$

Si on considère les courbes fermées $\gamma' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1'$ et $\gamma'' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1''$, on a :

$$A_1(\gamma) \leq A_1(\gamma') + A_1(\gamma'').$$

La courbe γ'' se trouve dans le même appartement F donc, d'après la Proposition 4.3, $(\mathbf{P}_2)$, on a

$$A_1(\gamma'') \leq b \cdot (\mathrm{long}(\gamma''))^2 \leq b(\ell + k\ell)^2 = b(1+k)^2\ell^2.$$

La courbe γ' est de longueur $\leq (1+k)\ell$.

La ligne polygonale $\mathcal{L}_1$ vérifie la propriété (π_2). Il s'ensuit que $\mathcal{L}_1$, dans F, se trouve du même côté de l'hyperplan déterminé par M, donc qu'il se trouve dans un demi-appartement, D, déterminé par cet hyperplan. D'après le Sous-lemme, il existe un appartement F_1 qui contient W_1 et D. Les appartements F_1 et F' ont en commun la chambre de Weyl W_1 et $\mathcal{L}_1 \subset F_1$.

Alors la courbe fermée $\gamma' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1'$, $\mathcal{L}_1 \subset F_1$, $\mathcal{L}_1' \subset F'$, vérifie les hypothèses de (P_q) avec W remplacé par W_1, donc par récurrence on a $A_1(\gamma') \leq c_q(1+k)^2\ell^2$.

Ainsi $A_1(\gamma) \leq b(1+k)^2\ell^2 + c_q(1+k)^2\ell^2 = (b+c_q)(1+k)^2\ell^2 = c_{q+1}\ell^2$.

Comme $q \leq q_0$, on conclut que toute courbe γ du type décrit doit vérifier $A_1(\gamma) \leq c_{q_0}\ell^2$. ♢

On applique ce lemme pour remplir les courbes $\gamma_{xy} = \mathcal{L}(x,y) \cup \mathcal{L}'(x,y)$ et on a

$$A_1(\gamma_{xy}) \leq c_9 d^2(x,y).$$

Alors $A_1(\gamma_j) \leq c_9 \sum_{(x,y)} d^2(x,y) \leq c_9 d^2(R_j, N_j) \leq c_{10}\ell^2$.

4.3.3 Conclusion. Pour obtenir l'aire qui remplit la "couronne" entre c et c' on somme sur j et on a :

$A(c',c'') \leq \Sigma_{j=1}^m [A(c_j) + A(\gamma_j)] \leq \Sigma_{j=1}^m (C_0\ell^2 + c_{10}\ell^2) = m(C_0 + c_{10})\ell^2 \leq C\ell^3$, car on rappelle que pour m on avait la majoration $m \leq \frac{2q_0}{\lambda} \cdot \ell$.

Ainsi $A(c') \leq A(c'') + A(c',c'') \leq C\ell^3 + c\ell^2 \leq C'\ell^3$. ♢

4.4 Une estimation de la fonction de Dehn pour des réseaux et des groupes résolubles

Corollaire 4.15. *Soit* Γ *un réseau irréductible de* $\mathbb{Q}$ *-rang 1 dans un groupe* G *semisimple de* $\mathbb{R}$ *-rang plus grand ou égal à* 3 *et soit* θ *la direction associé à* Γ*. Si* θ *vérifie la propriété* (Π)*, alors on a pour la fonction de Dehn* $A(n)$ *associée au groupe* Γ *l'estimation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \textit{tel que} \ A(n) \leq n^{3+\varepsilon} \ , \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Preuve. On utilise le théorème 4.1, le théorème 2.7 et la Remarque 2.6. Les cônes asymptotiques de (Γ, d_w) sont bilipschitz équivalents aux cônes de X_0 muni de la métrique induite (théorème 1.3). Les cônes asymptotiques de X_0, $\mathbf{K}_0$, sont de la forme (3.3). Il faut encore démontrer que par tout point de $\mathbf{K}_0$ passe un appartement entièrement contenu dans $\mathbf{K}_0$. On sait que dans l'espace symétrique $X = G/K$ il existe une famille dense de plats maximaux tels que leur image dans $\Gamma\backslash X$ soit un tore ([**Mo**], chapitre 8, lemme 8.3). L'ensemble limite dans le cône asymptotique de chacun de ces plats est un appartement entièrement contenu dans $\mathbf{K_0}$. D'autre part, le fait que Γ agit avec domaine fondamental compact sur X_0 implique que $\mathbf{K_0}$ est un espace homogène. Donc par tout point de $\mathbf{K}_0$ passe un appartement entièrement contenu dans $\mathbf{K}_0$. $\diamondsuit$

Corollaire 4.16. *Soit X un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 3 et $r \subset X$ un rayon régulier de direction $\theta = p(r(\infty))$. Si θ vérifie la propriété* (Π)*, la fonction de remplissage riemannienne de l'horosphère $H(r)$, qu'on note A, est au plus "asymptotiquement cubique" :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } A(\ell) \leq \ell^{3+\varepsilon} \ , \ \forall \ell \geq \ell_\varepsilon .$$

On a la même chose pour le groupe résoluble P_0 qui agit transitivement sur $H(r)$, muni d'une structure riemannienne invariante à gauche.

Preuve. La projection canonique de $X \setminus Hbo(r)$ sur $H(r)$ diminue les distances et les aires. Donc il suffit de démontrer l'estimation pour $X \setminus Hbo(r)$.

La métrique de longueur de $X \setminus Hbo(r)$ est bilipschitz équivalente à la métrique induite ([**Dr**], théorème 4.1). Tout cône asymptotique de $X \setminus Hbo(r)$ muni de la métrique induite est de la forme $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus Hbo(\rho)$, où $\rho = [r]$. Il faut encore démontrer que par tout point de $\mathbf{K}_0$ passe un appartement entièrement contenu dans $\mathbf{K}_0$.

On démontre d'abord qu'il existe un plat maximal F de X tel que $F \cap Hbo(r)$ est un ensemble borné. Si on suppose le contraire on a que pour tout appartement $A = F(\infty)$ de $\partial_\infty X$, $d_T(r(\infty), A) < \frac{\pi}{2}$, où d_T est la métrique de Tits. Soit A un appartement qui ne contient pas $r(\infty)$. L'ensemble $S = A \cap \{\alpha \,|\, d_T(r(\infty), \alpha) < \frac{\pi}{2}\}$ est un ensemble convexe. Il existe un demi-appartement D de A qui contient S dans son intérieur. Donc $d_T(r(\infty), \partial D) \geq \frac{\pi}{2}$, où ∂D est le bord de D. Soit $A = D \cup D'$ la décomposition de A en demi-appartements. On a aussi $d_T(r(\infty), D') \geq \frac{\pi}{2}$. L'immeuble $\partial_\infty X$ est $\aleph_1$-épais, donc il existe un appartement A_1 tel que $A_1 \cap A = D$. Si $A_1 = D \cup D'_1$ est la décomposition en demi-appartements de A_1, alors $A_2 = D' \cup D'_1$ est aussi un appartement (c'est une conséquence immediate de la Proposition 3.27 de [**Ti**]$_1$). Si $A_2 \cap \{\alpha \,|\, d_T(r(\infty), \alpha) < \frac{\pi}{2}\} \neq \emptyset$ alors D'_1 intersecte $\{\alpha \,|\, d_T(r(\infty), \alpha) < \frac{\pi}{2}\}$. Il s'ensuit, par la convexité de $A_1 \cap \{\alpha \,|\, d_T(r(\infty), \alpha) < \frac{\pi}{2}\}$ que $\partial D \cap \{\alpha \,|\, d_T(r(\infty), \alpha) < \frac{\pi}{2}\} \neq \emptyset$, d'où une contradiction.

L'homogénéité de $H(r)$ entraîne qu'il existe un M_1 tel que par tout point de $H(r)$ passe un plat maximal F dont l'intersection avec $Hbo(r)$ est de diamètre au plus M_1. En raisonnant avec une horosphère parallèle à $H(r)$, il est facile de voir qu'on peut généraliser ce resultat à tout point de $X \setminus Hbo(r)$. Et cela entraîne la propriété désirée pour $\mathbf{K}_0$. $\diamondsuit$

On donne un exemple de groupe résoluble auquel le corollaire précédent s'applique.

Définition 4.17. *Un morphisme injectif $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \to G\ell(n, \mathbb{R})$ est dit géné-*

rique si son image est conjuguée à un tore de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{t_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{t_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t_n} \end{pmatrix} ; a_1t_1 + a_2t_2 + \cdots + a_nt_n = 0 \right\},$$

où $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \neq 0$.

On a alors le resultat suivant :

Corollaire 4.18. *Soit un groupe résoluble* $Sol_{2n-1}(\alpha) = \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}^{n-1}, n \geq 3$, *où* $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \to G\ell(n, \mathbb{R})$ *est un morphisme injectif générique. Soit* g *une structure riemannienne invariante à gauche quelconque sur* $Sol_{2n-1}(\alpha)$.

Alors on a pour la fonction de remplissage riemannienne $A(\ell)$ *de* $(Sol_{2n-1}(\alpha), g)$ *l'estimation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } A(\ell) \leq \ell^{3+\varepsilon} \ , \ \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

Preuve. Le groupe $Sol_{2n-1}(\alpha)$ agit transitivement et librement sur une horosphère $H(r)$ de l'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ (n fois) déterminée par un rayon r de la forme $r(t) = (r_1(a_1t), r_2(a_2t), \dots, r_n(a_nt))$, où r_i sont des rayons géodésiques de $\mathbb{H}^2$ et a_i sont les coefficients de l'équation qui définit, à conjugaison près, l'image de α (a_i sont tous non-nuls, par hypothèse). Le corollaire précédent permet de conclure. ♢

Bibliographie

[**Al**] J. Alonso, *"Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries"*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **311** (1991), 761-764.

[**BGS**] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, "Manifolds of nonpositive curvature", Birkhäuser, 1985.

[**B**] W. Ballmann, "Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature", Birkhäuser, 1995.

[**Bo**] A. Borel, "Introduction aux groupes arithmétiques", Hermann,1969.

[**Bou**] N. Bourbaki, "Topologie générale", quatrième édition, Hermann, 1965.

[**BH**] M. Bridson, A. Haefliger, "Metric Spaces of Nonpositive Curvature", en préparation.

[**Br**] K. S. Brown, "Buildings", Springer, 1989.

[**Dr**] C. Druţu, *"Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens et dans des espaces symétriques"*, prépublication de l'Université Paris-Sud no. 96-73, 1996, à paraître dans Geometric and Functional Analysis.

[**ECHPT**] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, M. S. Paterson, W. P. Thurston, "Word processing and group theory" , Jones and Bartlett Publ., 1992.

[**Ge**] S. Gersten, *"Isoperimetric and Isodiametric Functions of Finite Presentations"*, in "Geometric Group Theory"(vol. 1), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, 79-96, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press, 1991.

[**GH**] E. Ghys, P. de la Harpe (eds), "Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov", Birkhäuser, 1990.

[**Gr**]$_1$ M. Gromov, *"Groups of polynomial growth and expanding maps"*, Publ. Math IHES **53** (1981), 53-73.

[**Gr**]$_2$ M. Gromov, *"Hyperbolic groups"*, in "Essays in group theory", S.Gersten editor, 75-265, MSRI Publ. **8**, Springer, 1987.

[**Gr**]$_3$ M. Gromov, *"Asymptotic Invariants of Infinite Groups"*, in "Geometric Group Theory"(vol. 2), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press, 1991.

[**GP**] M. Gromov, P. Pansu, *"Rigidity of Lattices : An Introduction"*, in "Geometric Topology : Recent Developments", P. de Bartolomeis, F. Tricerri (eds), 39-137, Lecture Notes in Mathematics 1504, Springer, 1991.

[**KL**] M. Kapovich, B. Leeb, *"On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of nonpositively curved manifolds"*, Geometric and Functional Analysis **3**(1995), no.5, 582-603.

[**KlL**] B. Kleiner, B. Leeb, *"Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings"*, preprint, april 1996.

[**Le**] E. Leuzinger, *"Polyhedral retracts and compactifications of locally symmetric spaces"*, preprint, 1995.

[**LMR**]$_1$ A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, *"Cyclic subgroups of exponential growth and metrics on discrete groups"* , C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **317** (1993), 735-740.

[**LMR**]$_2$ A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, *"The word and riemannian metrics on lattices of semisimple groups"*, preprint.

[**Ma**] G. A. Margulis, "Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups", Springer, 1991.

[**Mo**] G. D. Mostow, "Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces", AMS Studies no.78, Princeton University Press, 1973.

[**P**] P. Papasoglu, *"On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality"*, J. of Diff. Geometry **44** (1997), no. 4, 789-806.

[Pi] Ch. Pittet, *"Isoperimetric Inequalities in Nilpotent Groups"*, à paraître dans J. London Math. Soc.

[PL] Ch. Pittet, E. Leuzinger, *"Isoperimetric Inequalities for Lattices in Semisimple Lie Groups of Rank 2"*, Geometric and Functional Analysis **6** (1996), no.3, 489-511.

[Pr] G. Prasad, *"Strong rigidity of Q-rank one lattices"*, Inventiones Math. **21** (1973), 255-286.

[Ra] M. S. Raghunathan, "Discrete Subgroups of Lie Groups", Springer, 1972.

[Ti]$_1$ J. Tits, "Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs", Lecture Notes 386, Springer, 1974.

[Ti]$_2$ J. Tits, *"Classification of algebraic semisimple groups"*, Proc. Symp. Pure Math., vol 9, "Algebraic groups and discontinuous subgroups", 33-62, Boulder 1965, A. M. S. 1966.

[VDW] L. Van Den Dries, A. J. Wilkie, *"On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic"*. J. of Algebra **89** (1984), 349-374.

[VG] G. van der Geer, "Hilbert Modular Surfaces", Springer, 1988.

[Zi] R. Zimmer, "Ergodic Theory and Semisimple Groups", Birkhäuser, 1984.