Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens et dans des espaces symétriques

Cornelia DRUŢU*

Département de Mathématiques, Bt. 425,
Université de Paris-Sud, F–91405 Orsay Cedex, France

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for a horosphere to be undistorted in an Euclidean building and in a symmetric space. We are using the geometry of Euclidean buildings and the asymptotic cone. As a consequence, a geometric proof of the Lubotzky-Mozes-Raghunathan theorem for $\mathbb{Q}$-rank one lattices is given.

1 Introduction

On s'intéresse au problème de la nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens et dans des espaces symétriques.

Soit (X,d) un espace métrique géodésique $CAT(0)$ ([**GH**]) et r un rayon dans X (c'est-à-dire une isométrie $r:[0,\infty)\to X$). *La fonction de Busemann associée au rayon* r est la fonction

$$f_r : X \to \mathbb{R},\ f_r(x) = \lim_{t\to\infty} (\, d(x, r(t)) - t\,).$$

On appelle l'hypersurface $H(r)=\{x \mid f_r(x)=0\}$ *l'horosphère déterminée par le rayon* r. On appelle l'ensemble $Hb(r)=\{x \mid f_r(x)\leq 0\}$ *l'horoboule déterminée par* r. On appelle l'ensemble $Hbo(r)=\{x \mid f_r(x)<0\}$ *l'horoboule ouverte déterminée par* r.

Le problème de la nondistorsion est un problème général qui se pose pour tout espace métrique inclus au sens des ensembles dans un autre espace métrique.

Soit (X,d) un espace métrique, $A\subset X$ et soit d_A une métrique sur A. On dit que (A,d_A) est *nondistordu* dans X si et seulement s'il existe une constante $L\geq 1$ telle que

$$\frac{1}{L}d(x,y) \leq d_A(x,y) \leq Ld(x,y), \forall x,y \in A.$$

On dit aussi que (A,d_A) est *L-nondistordu.* On appelle L *constante de distorsion.*

*e-mail address : `drutu@matups.math.u-psud.fr`

L'étude de la nondistorsion des horosphères est intéressant en lui-même et aussi par les implications qu'il peut avoir dans la théorie de la classification des espaces métriques à quasi-isométrie près ([**Gr**]$_3$).

Avec des horosphères on peut construire des modèles, à quasi-isométrie près, d'espaces métriques connus, et qui sont ainsi plus faciles à étudier. Par exemple, on sait que certains groupes résolubles agissent simplement transitivement sur des horosphères d'espaces symétriques, donc que ces groupes avec une métrique invariante à gauche sont quasi-isométriques à des horosphères avec la métrique de longueur.

Un autre exemple d'espaces dont la géométrie à grande échelle est déterminée par des horosphères est celui des réseaux des groupes semisimples de $\mathbb{Q}$-rang un.

Des résultats sur la nondistorsion des horosphères sont obtenues dans [**Gr**]$_1$, pour des horosphères déterminées par des rayons réguliers, et aussi, d'une manière implicite, dans [**LMR**]$_2$, pour des horosphères qui délimitent l'espace associé à un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un. Le résultat obtenu dans cet article généralise les deux résultats.

On énonce d'abord une condition suffisante pour la nondistorsion d'une horosphère dans un immeuble euclidien.

Si un espace métrique $CAT(0)$, (X,d), est ou bien un espace symétrique ou un immeuble euclidien, son bord à l'infini $\partial_\infty X$ avec la métrique de Tits d_T est un immeuble sphérique ([**Mo**], chapitres 15 et 16, [**BGS**], Appendix 5, [**KlL**]). Il admet un marquage et à partir de ce marquage on peut définir une projection $p : \partial_\infty X \to \Delta$ sur une chambre modèle.

On peut associer alors à tout rayon $r \subset X$ un point dans la chambre modèle $\theta = p(r(\infty))$, qu'on appelle *la direction de r*. Avec cette notion, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1 (cf. théorème 3.10). *Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien 4-épais de rang plus grand ou égal à 2 et soit $\rho \subset \mathbf{K}$ un rayon qui vérifie la propriété géométrique suivante :*
$(\mathcal{I})$ pour toute décomposition nontriviale $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$, $\rho \not\subset \mathbf{K}_1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in \mathbf{K}_2$.

Alors il existe un M positif qui ne dépend que de $p(\rho(\infty)) = \theta$, tel que l'horosphère $H(\rho)$ munie de la métrique de longueur est M-nondistordue en $\mathbf{K}$.

A partir de ce théorème, on peut obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la nondistorsion d'une horosphère.

Théorème 1.2 (cf. théorème 3.9). *Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien 4-épais de rang plus grand ou égal à 2 et soit $\rho \subset \mathbf{K}$ un rayon. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
(P$_1$) *$H(\rho)$ avec la métrique de longueur est nondistordue dans $\mathbf{K}$;*
(P$_2$) *$H(\rho)$ est connexe ;*
(P$_3$) *pour toute décomposition nontriviale $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ telle que rang $\mathbf{K}_1 = 1$, $\rho \not\subset \mathbf{K}_1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in \mathbf{K}_2$.*
Si ρ vérifie une de ces trois propriétés, la constante de nondistorsion de $H(\rho)$ avec la métrique de longueur ne dépend que de $p(\rho(\infty)) = \theta$.

Pour obtenir un résultat similaire pour des espaces symétriques, on utilise le cône asymptotique. Le cône asymptotique est un outil d'étude de la géométrie à grande échelle introduit par M. Gromov ([**Gr**]$_1$, [**Gr**]$_2$), Van den Dries et Wilkie ([**VDW**]). On associe à tout espace métrique donné un nouvel espace métrique construit avec des méthodes d'analyse non-standard et qui représente, en quelque sorte, une "image de l'espace métrique donné vu de l'infini".

Tout cône asymptotique d'un espace symétrique est un immeuble euclidien $\aleph_1$-épais ([**KlL**]). Ceci et le théorème 1.1 impliquent :

Théorème 1.3 (cf. théorème 4.1). *Soit X un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 2 et soit $r \subset X$ un rayon. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
($\mathbf{P}_1^*$) *$H(r)$ avec la métrique de longueur est nondistordue dans X ;*
($\mathbf{P}_2^*$) *pour toute décomposition nontriviale $X = X_1 \times X_2$ telle que rang $X_1 = 1$, $r \not\subset X_1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in X_2$.*
Si r vérifie une de ces deux propriétés, la constante de nondistorsion de $H(r)$ avec la métrique de longueur ne dépend que de $p(r(\infty)) = \theta$.

Pour tout réseau irréductible Γ de $\mathbb{Q}$-rang un dans un groupe semisimple G, on obtient un espace métrique X_0 quasi-isométrique à Γ en enlevant de l'espace symétrique associé à G, X, une famille d'horoboules ouvertes disjointes $\{Hbo(\gamma r_i) \mid \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2 \dots k\}\}$. On peut montrer que les rayons γr_i ont la même direction associée, donc que $p(\{\gamma r_i \mid \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2 \dots k\}\}) = \theta$, et qu'ils vérifient la condition **($\mathbf{P}_2^*$)**. Alors le théorème 1.3 implique que toutes les horosphères $H(\gamma r_i)$ avec la métrique de longueur sont M-nondistordues, avec le même M, et donc que X_0 avec la métrique de longueur est M-nondistordu dans X. On obtient ainsi comme conséquence du théorème 1.3 une preuve du théorème de Lubotzky-Mozes-Raghunathan pour des réseaux irréductibles de $\mathbb{Q}$-rang un. On rappelle l'énoncé de ce théorème.

Théorème 1.4 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan). *Si G est un groupe de Lie semisimple de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2 et si Γ est un réseau irréductible de G, alors Γ muni de la métrique des mots est nondistordu dans G muni d'une métrique invariante à gauche.*

Le plan de l'article est le suivant : dans la section 2 on rappelle simultanément les notions et les propriétés de base des cônes asymptotiques et des immeubles euclidiens. Dans la section 3 on démontre le résultat sur la nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens. Le résultat sur la nondistorsion des horosphères dans des espaces symétriques est démontré dans la section 4. Dans la dernière section on en déduit le théorème de Lubotzky-Mozes-Raghunathan pour les réseaux irréductibles de $\mathbb{Q}$-rang un.

Remerciements

Cet article a sa source dans mon travail de thèse, sous la direction de Pierre Pansu que je tiens à remercier vivement ici. Je remercie aussi Bernhard Leeb, Frédéric Paulin et Frédéric Haglund pour des suggestions et des discussions très utiles.

2 Cône asymptotique et immeubles

2.1 Construction, propriétés, exemples

Le but de la construction est d'associer à un espace métrique (X, d) "un espace limite", X_∞, qui représenterait l'image de X vu du point ∞. Donc X_∞ doit être obtenu comme une sorte de limite des espaces $(X, \varepsilon \cdot d)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Dans ([**Gr**]$_1$) M. Gromov construit, au cours de la preuve, un espace limite. En s'inspirant de cette construction, Van den Dries et Wilkie énoncent une définition constructive d'espace limite, à l'aide de l'analyse non standard ([**VDW**]). M. Gromov ([**Gr**]$_3$), M. Kapovich, B. Kleiner et B. Leeb ([**KL**], [**KlL**]) vont reprendre, généraliser et utiliser cette définition dans des buts divers.

L'outil le plus important dans cette construction est l'ultrafiltre non principal.

On appelle *ultrafiltre non principal* une mesure de probabilité $\omega : P(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$ finiment additive telle que $\omega(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{N}$, A finie.

Une définition équivalente est que ω est la fonction caractéristique d'une partie $P \subset P(\mathbb{N})$ qui est un ultrafiltre au sens de [**Bou**], I.6.4, et qui contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire le filtre formé par les complémentaires des ensembles finis.

L'existence des ultrafiltres non principaux est assuré par le théorème de [**Bou**], I.6.4 qui dit que tout filtre est contenu dans au moins un ultrafiltre, donc le filtre de Fréchet aussi.

Dans un espace topologique (X, τ) on définit la *ω-limite d'une suite* $(a_n) \subset X$ comme étant un élément $a \in X$ tel que pour tout voisinage V de a, $\omega(A_V) = 1$ où $A_V = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in V\}$.

Si X est séparé la ω-limite est unique.

Remarque 2.1. *La propriété caractéristique des ensembles compacts qui dit que tout ultrafiltre est convergent* ([**Bou**], *I*.9.1) *implique que toute suite dans un compact a une ω-limite. En particulier toute suite numérique bornée a une ω-limite.*

Soit (X, d) l'espace métrique auquel on veut associer un cône asymptotique.

On fixe ω ultrafiltre non principal, $f_o : \mathbb{N} \to X$ suite qu'on appelle *suite des centres d'observation*, et $(d_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suite numérique qu'on appelle *suite des scalaires*.

Définition 2.2 ([Gr]$_3$). *On pose $C = \{f : \mathbb{N} \to X \text{ tel que } d(f(n), f_0(n)) \le c_f \cdot d_n\}$. Le ω-cône asymptotique par rapport aux centres d'observation $(f_0(n))$ et aux scalaires (d_n) est $Con_\omega(X, f_0, (d_n)) = C/\sim$, où la relation d'équivalence est définie par*

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{\omega} \frac{d(f(n), g(n))}{d_n} = 0.$$

Le cône asymptotique est un espace métrique avec la métrique

$$d([f], [g]) = \lim\nolimits_\omega \tfrac{d(f(n), g(n))}{d_n}.$$

Remarque 2.3. *Dans* [**KL**] *on trouve une définition plus générale qui n'utilise pas des points d'observation, mais qui se réduit finalement à celle-ci, parce que le cône défini là n'est rien d'autre que* $\coprod_{f_0} Con_\omega(X, f_0, (d_n))$, *où on a identifié* $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *et* $Con_\omega(X, g_0, (d_n)), f_0, g_0 \in X^{\mathbb{N}}$ *si* $\lim_\omega \frac{d(f_0(n), g_0(n))}{d_n}$ *existe et est finie (après cette identification les éléments de la réunion deviennent deux à deux disjoints) et on a mis* $dist\,(Con_\omega(X, f_0, (d_n)), Con_\omega(X, g_0, (d_n))) = +\infty$ *au cas contraire.*

On appelle $A \subset Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *ensemble limite* s'il existe une suite d'ensembles $A_n \subset X$ telle que $A = \{[x_n]; x_n \in A_n \ \omega\text{-p.s.}\}$.

On note $A = [A_n]$.

2.1.1 Propriétés du cône asymptotique

On peut trouver les propriétés énoncées ici et encore d'autres dans [**KL**].

a) Tout $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ est un espace métrique complet ([**VDW**]).

Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X, y \in X$. Une isométrie $c : [0, d(x, y)] \to X$, $c(0) = x$, $c(d(x, y)) = y$, s'appelle *géodésique entre* x *et* y. On note $c([0, d(x, y)]) = [x, y]$ et on l'appelle parfois du même nom. On dit qu'un espace métrique est *géodésique* si pour tout $x \in X$, $y \in X$, il existe une géodésique entre x et y.

b) Si (X, d) est un espace géodésique alors tout $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ est un espace géodésique.

Preuve. Pour tous $[f], [g] \in Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ distincts, on a, pour chaque n, une géodésique entre $f(n)$ et $g(n)$, $c_n : [0, d(f(n), g(n))] \to X$. On note $D = d([f], [g]) = \lim_\omega \frac{d(f(n), g(n))}{d_n}$.

Alors $C : [0, D] \to Con_\omega X, C(t) = [(c_n(\frac{d(f(n), g(n))}{D} \cdot t))_{n \in \mathbb{N}}]$ est une géodésique entre $[f]$ et $[g]$. $\diamondsuit$

c) Si (X, d) est un espace géodésique $CAT(0)$ alors tout $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ est un espace géodésique $CAT(0)$.

2.1.1 Exemples de cônes asymptotiques

Exemple 1 : Le cône asymptotique d'un espace euclidien $(\mathbb{R}^n, d_e)$ est l'espace euclidien lui-même. Le cône asymptotique d'un réseau au sens métrique de l'espace euclidien, par exemple $(\mathbb{Z}^n, d_e)$, est toujours l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, d_e)$.

Exemple 2 : En ce qui concerne les cônes asymptotiques des espaces métriques hyperboliques ([**Gr**]$_2$ ou [**GH**]) on a le résultat suivant :

Proposition 2.4 (cf. [Gr]$_3$). **(i)** *Si* (X, d) *est un espace* δ*-hyperbolique alors tout cône asymptotique* $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *est* 0*-hyperbolique.*

(ii) *Si* (X, d) *est un espace géodésique, on a même plus :* (X, d) *est* δ*-hyperbolique si et seulement si* $Con_\omega(X, f_0, (d_n))$ *est un arbre réel, pour tout* ω, f_0 *et* (d_n).

Les espaces symétriques de rang plus grand ou égal à 2 sont, dans un certain sens, un mélange de parties plates et de parties hyperboliques. Ainsi, leurs cônes asymptotiques vont à la fois contenir beaucoup de parties plates et se ramifier beaucoup, comme les arbres réels.

Pour décrire les cônes asymptotiques des espaces symétriques de rang plus grand ou égal à 2 on introduit d'abord les notions de base sur les immeubles sphériques et euclidiens.

2.2 Immeubles sphériques

Les références pour cette section et la section suivante sont [**Br**], [**KlL**] et [**Ti**]. On a cru nécessaire d'introduire ces sections pour souligner qu'on adopte la manière géométrique de définir les immeubles, introduite dans [**KlL**], et pour énoncer explicitement des résultats qu'on utilise et qui se trouvent d'une manière implicite dans la littérature.

Soit E^m un espace euclidien de dimension m et soit S^{m-1} la sphère unité dans E^m.

• Un groupe fini $\mathcal{W}$ engendré par un ensemble S de symétries par rapport à des hyperplans qui passent par l'origine de E^m s'appelle *groupe de Coxeter sphérique*.
• Tout groupe de Coxeter sphérique qui a un ensemble S de générateurs minimal de cardinal m détermine une structure de complexe simplicial sur S^{m-1}. On appelle *complexe de Coxeter sphérique* la paire formée par ce complexe simplicial et le groupe, $(S^{m-1}, \mathcal{W})$.
• Les traces des hyperplans de symétrie de $\mathcal{W}$ sur S^{m-1} s'appellent *des hyperplans singuliers* du complexe de Coxeter. Les intersections des hyperplans singuliers s'appellent des *plats singuliers*.

On fixe un tel complexe simplicial $(S^{m-1}, \mathcal{W})$.

Définition 2.5. *Soit Σ un complexe simplicial formé par des simplexes de S^{m-1} et toutes leurs faces. On appelle les $(m-1)$-simplexes des chambres. On appelle les simplexes de dimension plus petite ou égale à $m-2$ des murs. Soit d une métrique sur Σ qui coïncide sur chaque simplexe avec la métrique de S^{m-1} et telle que (Σ, d) est un espace $CAT(1)$. Soit $\mathcal{A}$ une famille de sous-complexes finis tels que pour tout $A \in \mathcal{A}$ il existe une application $i_A : S^{m-1} \to A$ qui est une isométrie et un isomorphisme de complexes simpliciaux. On appelle les éléments de $\mathcal{A}$ des appartements de Σ.*
La paire $(\Sigma, \mathcal{A})$ est un immeuble sphérique si :
(1) *Pour chaque paire de chambres, il existe un appartement qui les contient.*
(2) *Si $A, A' \in \mathcal{A}$ ont une intersection non-vide, alors il existe un isomorphisme de A sur A' qui fixe $A \cap A'$.*
Un immeuble sphérique qui vérifie aussi la propriété :
(3) *Chaque mur de codimension 1 de Σ est contenu dans au moins c chambres où c est un nombre cardinal, s'appelle immeuble sphérique c-épais.*

• On appelle *m le rang de Σ*.
• On appelle le complexe de Coxeter sphérique $(S^{m-1}, \mathcal{W})$ *complexe de Coxeter modèle* de l'immeuble.

• Les images par des isomorphismes i_A des hyperplans singuliers et des plats singuliers de S^{m-1} s'appellent des *hyperplans singuliers* et respectivement des *plats singuliers* de l'immeuble. Les images par des isomorphismes i_A des paires de points opposés s'appellent aussi *des paires de points opposés.*
• Si le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble est irréductible on dit que l'immeuble Σ est *irréductible.*

Tout immeuble sphérique a un marquage ([**Br**], p.78) et on peut définir une projection $p : \Sigma \to \Delta$, où Δ est une chambre modèle, qui envoye toute chambre de Σ sur cette chambre modèle, en respectant le marquage.

Le complexe de Coxeter modèle a lui aussi un marquage compatible avec celui de Σ, c'est-à-dire tel que les applications $i_A : S^{m-1} \to A$, $A \in \mathcal{A}$, sont des isomorphismes de complexes simpliciaux marqués. Donc on peut aussi définir une projection
$p_S : S^{m-1} \to \Delta$ qui respecte ce marquage.

Il est facile de voir que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $p \circ i_A = p_S$.

Définition 2.6. *Un point $x \in \Sigma$ est appelé point singulier si $p(x)$ se trouve dans un des murs de Δ. Sinon on appelle x point régulier.*

Remarque 2.7. *Si on choisit un appartement $A \in \mathcal{A}$ et une chambre $\mathcal{C} \subset A$, on peut définir une rétraction $retr_{A,\mathcal{C}} : \Sigma \to A$ de l'immeuble sur A qui fixe $\mathcal{C}$ de la manière suivante :*
Pour tout $x \in \Sigma$ il existe un appartement A' qui contient x et $\mathcal{C}$ et il existe un isomorphisme $i_{A',A} : A' \to A$ qui fixe $A \cap A'$. On définit $retr_{A,\mathcal{C}}(x) = i_{A',A}(x)$. D'après [**Ti**], $\S 3.3 - 3.5$*, cette application est bien définie et a les propriétés suivantes :*

(1) *$retr_{A,\mathcal{C}}$ est contractante et préserve toutes les distances à des points de $\mathcal{C}$.*

(2) *Si on note $p_A : A \to \Delta$ la projection de A sur la chambre modèle qui respecte le marquage, on a :*
$$p_A \circ retr_{A,\mathcal{C}} = p$$

La deuxième propriété est due au fait que chaque isomorphisme $i_{A',A}$ est un isomorphisme qui fixe au moins une chambre donc c'est aussi un isomorphisme de complexes simpliciaux marqués.

Remarque 2.8. *Soit $x \in \Sigma$ un point régulier. Alors il existe une unique chambre $\mathcal{C}_0$ qui contient x. Soit A_0 un appartement qui contient $\mathcal{C}_0$.*

a) *Si $\mathcal{C}$ est une chambre de Σ il existe au plus un opposé de x dans $\mathcal{C}$. Car si $y \in \mathcal{C}$ est un opposé de x, $retr_{A_0,\mathcal{C}_0}(y)$ l'est aussi; or il existe un seul opposé de x dans A_0. Donc si A est un appartement de Σ, x ne peut avoir qu'un nombre fini d'opposés dans A.*

b) *Si y est un opposé de x, il existe un unique appartement de Σ qui contient x et y. Car si $\mathcal{C}$ est l'unique chambre qui contient y, comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ sont opposées, il existe un unique appartement qui les contient* ([**Ti**]).

Soit $x \in S^{m-1}$ un point tel que $p_S(x) = \theta$. On note Spl l'ensemble des simplexes de S^{m-1}.

Remarque 2.9. *L'ensemble des distances $D_\theta = \{d(x,\sigma); \sigma \in Spl, x \notin \sigma\}$ est un ensemble fini qui ne dépend pas de x mais seulement de θ. Si on écrit cet ensemble en ordre croissant, on peut avoir trois termes consécutifs de la forme $\frac{\pi}{2} - \delta$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \delta'$ ou deux termes consécutifs $\frac{\pi}{2} - \delta$, $\frac{\pi}{2} + \delta'$, où δ et δ' sont des constantes qui ne dépendent que de θ et de S^{m-1}.*

Proposition 2.10. *Soit x un point de l'immeuble sphérique Σ et A un appartement.*

- **(i)** *Un point $\beta \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, \beta)$ est un point singulier.*
- **(ii)** *Soit un point β comme ci-dessus qui se trouve à l'intérieur d'un mur $\mathcal{M}$, soit A' un appartement qui contient x et $\mathcal{M}$ et soit Φ le plat singulier minimal de A' qui contient $\mathcal{M}$. Alors $d(x, \Phi) = d(x, \beta)$. Si de plus $d(x, \beta) = \frac{\pi}{2}$, alors x est orthogonal à Φ, c'est-à-dire $d(x, \beta') = \frac{\pi}{2}$, $\forall \beta' \in \Phi$. En particulier $d(x, \beta') = \frac{\pi}{2}$, $\forall \beta' \in \mathcal{M}$.*

Preuve. **(i)** Si on suppose que β est un point régulier, alors il existe une unique chambre $\mathcal{C}_0$ qui le contient. Dans un appartement qui contient x et $\mathcal{C}_0$, la géodésique entre x et β coupe un mur de $\mathcal{C}_0$ en un point β' tel que $d(x, \beta') < d(x, \beta)$. D'autre part $\beta \in A$ implique $\mathcal{C}_0 \subset A$, donc $\beta' \in A$, d'où la contradiction.

(ii) A' est isométrique à une sphère S^{m-1} dans un espace euclidien de dimension m (m étant le rang de l'immeuble). On peut voir alors x comme un vecteur unitaire dans l'espace euclidien, Φ comme l'intersection de S^{m-1} avec un sous-espace $\mathbf{L}$, et $\mathcal{M}$ comme l'intersection de S^{m-1} avec un cône simplicial convexe de $\mathbf{L}$.

Supposons que $d(x, \Phi) < d(x, \beta)$. Soit $\beta' \in \Phi$ tel que $d(x, \Phi) = d(x, \beta') < d(x, \beta)$. Alors la géodésique de S^{m-1} entre β' et β coupe un mur de $\mathcal{M}$ en un point β'' tel que $d(x, \beta'') < d(x, \beta)$. D'autre part, comme β se trouve à l'intérieur de $\mathcal{M}$ et $\beta \in A$, il s'ensuit que $\mathcal{M} \subset A$, donc $\beta'' \in A$. On obtient une contradiction.

Donc $d(x, \beta') \geq d(x, \beta)$ pour tout $\beta' \in \Phi$.

Supposons que $d(x, \beta) = \frac{\pi}{2}$. En termes d'espace euclidien cela s'écrit comme $< x, \beta >= 0$, et $d(x, \beta') \geq \frac{\pi}{2}$ comme $< x, \beta' >\leq 0, \forall \beta' \in \mathcal{M}$.

Il n'est pas difficile de voir qu'on peut choisir dans $\mathcal{M}$ une base pour $\mathbf{L}$, $\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k\}$. On la choisit dans un voisinage de β dans $\mathcal{M}$ de sorte que β forme un angle aigu avec chaque β_i. Alors $\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k, a_1 > 0, \ldots, a_k > 0$.

On a

$$< x, \beta >= a_1 < x, \beta_1 > + \cdots + a_k < x, \beta_k >= 0$$

et $< x, \beta_i >\leq 0, \forall i \in \{1, 2 \ldots k\}$. Ceci implique $< x, \beta_i >= 0, \forall i \in \{1, 2 \ldots k\}$ et $< x, \beta' >= 0$ pour tout $\beta' \in \Phi$, en particulier pour tout $\beta' \in \mathcal{M}$. $\diamondsuit$

2.3 Immeubles euclidiens

2.3.1 Définitions

Soit V^m l'espace linéaire associé à E^m. On sait qu'on peut décomposer le groupe d'isométries de E^m comme $\mathrm{Isom}(E^m) = V^m \rtimes O(V^m)$.

Soit proj : $\mathrm{Isom}(E^m) \to O(V^m)$ la projection sur la partie rotationelle.

• Un groupe $\mathcal{W}_{aff}$ engendré par des symétries par rapport à des hyperplans affines de E^m et tel que $\mathrm{proj}(\mathcal{W}_{aff})$ est finie s'appelle *groupe de Coxeter euclidien.* La projection $\mathcal{W} = \mathrm{proj}(\mathcal{W}_{aff})$ est un groupe de Coxeter sphérique.
• Si $\mathcal{W}$ a un ensemble de générateurs minimal de cardinal m, on appelle la paire $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ *complexe de Coxeter euclidien.*
• Les hyperplans de symétrie de $\mathcal{W}_{aff}$ s'appellent *des hyperplans singuliers* et leurs intersections des *plats singuliers.*
• Les polytopes ayant leurs faces seulement dans des hyperplans singuliers s'appellent des *polytopes de Weyl.* Les polytopes ayant leurs faces seulement dans des hyperplans singuliers qui passent par un point $x \in E^m$ s'appellent des *cônes polytopiques de Weyl de sommet x.*
• On dit qu'un plat singulier de dimension k est *adjacent* à un polytope de Weyl ou qu'il est un *k-plat singulier d'appui* du polytope si son intersection avec le polytope se trouve dans le bord du polytope et est de dimension k .
Si on identifie le bord de Tits de $E^m, \partial_\infty E^m$, à S^{m-1}, on peut voir que $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$ est un complexe de Coxeter sphérique. Soit Δ sa chambre modèle.
• On appelle *chambre de Weyl* tout cône polytopique de Weyl ayant une chambre de $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$ comme bord à l'infini.
• On dit que le complexe de Coxeter euclidien $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ est *irréductible* si le complexe de Coxeter sphérique $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$ est irréductible.

On fixe un complexe de Coxeter euclidien $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$.

Définition 2.11. *Soit* $\mathbf{K}$ *un espace géodésique* $CAT(0)$*. Soit une famille de plongements isométriques* $i_A : E^m \to \mathbf{K}$ *invariante par précomposition par des éléments de* $\mathcal{W}_{aff}$*. On appelle leurs images des appartements de* $\mathbf{K}$ *et on note la classe des appartements par* $\mathcal{A}$*.*
Les images par les plongements i_A *des hyperplans singuliers, plats singuliers, polytopes de Weyl et chambres de Weyl de* $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ *sont appelés respectivement des hyperplans singuliers, plats singuliers, polytopes de Weyl et chambres de Weyl de* $\mathbf{K}$*. Chaque hyperplan singulier partitionne un appartement en deux parties qu'on appelle des demi-appartements.*
On dit que la paire $(\mathbf{K}, \mathcal{A})$ *forme un immeuble euclidien de rang* m *si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
(1) *Tout segment, rayon ou géodésique est contenu dans un appartement.*
(2) *Si* $i_1 : E^m \to \mathbf{K}$ *et* $i_2 : E^m \to \mathbf{K}$ *sont deux plongements tels que* $i_1(E^m) \cap i_2(E^m) \neq \emptyset$*, alors* $i_1^{-1}(i_2(E^m))$ *est un polytope de Weyl et il existe un* $w \in \mathcal{W}_{aff}$ *tel que* $w(i_1^{-1}(i_2(E^m))) = i_2^{-1}(i_1(E^m))$*.*

(3) *Si* $[x, y]$ *et* $[x, z]$ *sont deux segments géodésiques, alors deux sous-segments non-dégénérés* $[x, y'] \subset [x, y]$ *et* $[x, z'] \subset [x, z]$ *sont contenus dans un même appartement.*
Un immeuble euclidien qui vérifie aussi la propriété :
(4) *Chaque hyperplan singulier est le bord d'au moins c demi-appartements d'intérieurs deux à deux disjoints*
où c est un nombre cardinal, s'appelle immeuble euclidien c-épais.

• On appelle le complexe de Coxeter euclidien $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ *complexe de Coxeter modèle* de l'immeuble.
• Si le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble est irréductible on dit que l'immeuble est *irréductible.*
• Si le groupe des isométries de $\mathbf{K}$ agit transitivement sur $\mathbf{K}$ on dit que l'immeuble est *homogène.*

Le bord de Tits de $\mathbf{K}$, $\partial_\infty \mathbf{K}$, est un immeuble sphérique de rang m ayant comme appartements les bords de Tits des appartements de $\mathbf{K}$, donc comme complexe de Coxeter modèle le bord à l'infini du complexe de Coxeter modèle de $\mathbf{K}$.

Remarque 2.12. *Cette définition est équivalente à celle énoncée dans* [**KlL**]. *En effet, il n'est pas difficile de voir que les axiomes* **(2)** *et* **(3)** *de cette définition impliquent les axiomes* **(EB1)** *et* **(EB2)** *de* [**KlL**]. *La section 4.2.2 et le Sous-lemme 4.4.1 de* [**KlL**] *montrent qu'on a aussi l'implication inverse.*

D'après [**KlL**], *cette définition est plus forte que celle donnée dans les livres classiques sur les immeubles* (*par exemple* [**Ro**]). *En effet, les lemmes 4.6.5 et 4.8.2 (ii) de* [**KlL**] *montrent que dans les conditions de cette définition toutes les axiomes de la définition classique d'immeuble euclidien sont vérifiés.*

2.3.2 L'immeuble des directions en un point

On rappelle la définition de l'espace de directions au point $x, \Sigma_x \mathbf{K}$, dans un immeuble euclidien homogène $\mathbf{K}$.

Pour ce faire, on définit d'abord deux types d'angles dans un espace $CAT(0)$, $\mathbf{K}$.

Pour deux segments géodésiques $[x, a]$ et $[x, b]$, on considère le triangle de comparaison $\widetilde{x}, \widetilde{a}, \widetilde{b}$, c'est-à-dire le triangle plan qui a les mêmes longueurs des arêtes que le triangle géodésique xab dans X. On note $\widetilde{<}_x(a, b)$ l'angle qu'on obtient au sommet $\widetilde{x}$.

On définit *l'angle formé par les segments* $[x, a]$ *et* $[x, b]$ *en* x par $<_x (a, b) = \lim_{t,s\to 0} \widetilde{<}_x(a_t, b_s)$, où a_t est le point de $[x, a]$ correspondant au paramètre $t \in [0, 1]$ dans le paramétrage qui associe 0 à x et 1 à a.

Remarque 2.13. a) *Si l'espace* $CAT(0)$ *qu'on considère est un immeuble euclidien, alors, d'après la définition, pour chaque paire de segments* $[x, a]$ *et* $[x, b]$ *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* x, a_ε *et* b_ε *forment un triangle géodésique plat (c'est-à-dire isométrique à un triangle euclidien) ayant l'angle* $<_x (a, b)$ *en* x. *En particulier, si* $<_x (a, b) = 0$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $\delta > 0$ *tel que* $[x, a_\varepsilon] = [x, b_\delta]$.

b) *Dans le lemme 4.1.2 de* [**KlL**] *un résultat plus fort est prouvé :*

Si $[x, \alpha)$ et $[x, \beta)$ sont deux rayons dans un immeuble euclidien $\mathbf{K}$, $\alpha, \beta \in \partial_\infty \mathbf{K}$, alors il existe un $z \in [x, \alpha)$ tel que le triangle idéal formé par x, z et β est euclidien, c'est-à-dire c'est une bande euclidienne.

Désormais on suppose que $\mathbf{K}$ est un immeuble euclidien homogène.

L'espace de directions au point x dans $\mathbf{K}$, $\Sigma_x \mathbf{K}$, est formé par les classes d'équivalence des segments géodésiques issus de x par rapport à la relation d'équivalence "angle nul en x". On note $\overline{xa}$ la classe correspondant au segment $[x, a]$, et on l'appelle *la direction de $[x, a]$ en x*. De même, on note $\overline{x\alpha}$ la classe du rayon $[x, \alpha)$, $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$.

L'espace $\Sigma_x \mathbf{K}$ avec la métrique donnée par $d_x(\overline{xa}, \overline{xb}) = <_x (a, b)$ est un immeuble sphérique ayant comme appartements les ensembles $F_x = \{\overline{xa} \, , [x, a] \subset F\}$, où F est un appartement de $\mathbf{K}$ qui passe par x. Les chambres sont de la forme $W_x = \{\overline{xa}, [x, a] \subset W\}$, où W est une chambre de Weyl de sommet x. De même pour les plats singuliers et les murs ([**KlL**], §4).

On peut établir une relation entre la position relative d'un $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$ dans la chambre qui le contient et la position de $\overline{x\alpha}$ dans la chambre de $\Sigma_x \mathbf{K}$ qui le contient. Cette relation découle du résultat suivant:

Lemme 2.14. *Pour tout $x \in \mathbf{K}$ et $\mathcal{W}$ chambre dans $\partial_\infty \mathbf{K}$ l'ensemble de rayons $\{[x, \alpha), \alpha \in \mathcal{W}\}$ forme une chambre de Weyl de sommet x.*

Preuve. On choisit un point régulier $\alpha_0 \in \mathcal{W}$. Il existe un appartement F qui contient le rayon $[x, \alpha_0)$ et dans cet appartement il existe une chambre de Weyl W de sommet x qui contient $[x, \alpha_0)$. Alors $W(\infty)$ contient le point régulier α_0, tout comme $\mathcal{W}$. Il s'ensuit que $W(\infty) = \mathcal{W}$. Il est facile de voir que $W = \{[x, \alpha), \alpha \in W(\infty)\} = \{[x, \alpha), \alpha \in \mathcal{W}\}$. ♢

Supposons qu'on a fixé un marquage pour $\partial_\infty \mathbf{K}$. En chaque point $x \in X$ on choisit pour $\Sigma_x \mathbf{K}$ un marquage compatible avec celui de $\partial_\infty \mathbf{K}$:

- Soit $\mathcal{W}^0$ une chambre fondamentale en $\partial_\infty \mathbf{K}$ dont on a fixé le marquage.
- Pour chaque $x \in X$ on prend la chambre de Weyl $W^0 = \{[x, \alpha), \alpha \in \mathcal{W}^0\}$.
- Le marquage de $\mathcal{W}^0$ induit un marquage de W^0_x. On choisit W^0_x avec ce marquage induit comme chambre fondamentale pour $\Sigma_x \mathbf{K}$.

Dans la suite on démontre que le marquage de $\Sigma_x \mathbf{K}$ ne dépend pas du choix de la chambre fondamentale $\mathcal{W}^0$ de $\partial_\infty \mathbf{K}$, mais seulement du marquage choisi pour $\partial_\infty \mathbf{K}$.

Lemme 2.15. *Pour toute chambre de Weyl W, de sommet x, dans $\mathbf{K}$, W_x et $W(\infty) = \mathcal{W}$ ont le même marquage pour les sommets correspondants.*

Pour montrer ce lemme on utilise le résultat suivant :

Lemme 2.16. *Soient W et W' deux chambres de Weyl de sommet x telles que $W_x = W'_x = \mathcal{W}_x$. Les marquages de $\mathcal{W}_x$ induits par $W(\infty)$ et $W'(\infty)$ coïncident.*

Preuve du lemme 2.16 . D'après le sous-lemme 4.4.1 de [**KlL**], $W_x = W'_x$ implique qu'il existe ε tel que $W \cap B(x, \varepsilon) = W' \cap B(x, \varepsilon)$. Alors, si on considère deux appartements F et F' qui contiennent W et W', respectivement, l'axiome **(2)** de l'immeuble euclidien permet de conclure. ♢

Preuve du lemme 2.15 On raisonne par récurrence sur la distance simpliciale de W_x à W_x^0. Si $d(W_x, W_x^0) = 1$, c'est-à-dire si $W_x = W_x^0$ alors on peut conclure avec le lemme 2.16.

On suppose que le lemme est vrai pour les chambres de $\Sigma_x\mathbf{K}$ situées à distance simpliciale d de W_x^0 et on le démontre pour celles à distance $d+1$.

ventuellement en échangeant W avec une autre chambre de Weyl de sommet x ayant la même chambre de directions en x (on peut faire ceci d'après le lemme 2.16), on peut supposer qu'il existe une chambre de Weyl W' de sommet x telle que W et W' ont en commun un mur de codimension 1, se trouvent dans le même appartement et $d(W_x^0, W_x') = d$. Alors W_x' a le même marquage que $W'(\infty)$ ce qui entraîne la même chose pour W_x et $W(\infty)$. $\diamondsuit$

Avec ces marquages fixés sur $\partial_\infty\mathbf{K}$ et $\Sigma_x\mathbf{K}, x \in \mathbf{K}$, on peut définir les projections qui respectent les marquages $P : \partial_\infty\mathbf{K} \to \Delta$, $p_x : \Sigma_x\mathbf{K} \to \Delta$. Les immeubles $\partial_\infty\mathbf{K}$ et $\Sigma_x\mathbf{K}$ on le même complexe de Coxeter modèle, qu'on note S. Le complexe de Coxeter S a un marquage compatible avec ceux de $\partial_\infty\mathbf{K}$ et $\Sigma_x\mathbf{K}$ et on peut définir une projection $p_S : S \to \Delta$ qui respecte ce marquage.

Corollaire 2.17. *Si ρ est un rayon géodésique tel que $\rho(0) = x$ et si on note $\overline{\rho_x}$ la direction en x qui correspond à ρ, on a*

$$p_x(\overline{\rho_x}) = P(\rho(\infty)).$$

Définition 2.18. *On appelle $\alpha = p_x(\overline{\rho_x}) = P(\rho(\infty)) \in \Delta$ la direction du rayon géodésique ρ. On appelle ρ rayon singulier si α se trouve dans un mur de Δ, et rayon régulier sinon.*

Corollaire 2.19. *Si $\alpha, \beta \in \partial_\infty\mathbf{K}, P(\alpha) = \theta_1, P(\beta) = \theta_2$, alors pour tout $x \in \mathbf{K}$, $<_x (\alpha, \beta)$ peut prendre seulement un nombre fini de valeurs et cet ensemble de valeurs possibles ne dépend pas de x, mais seulement de θ_1 et de θ_2.*

Preuve. D'après le Corollaire 2.17, on a $p_x(\overline{x\alpha}) = \theta_1$ et $p_x(\overline{x\beta}) = \theta_2$.

On a l'ensemble fini de distances

$$\delta(\theta_1, \theta_2) = \{d_S(x_1, x_2); x_1, x_2 \in S, p_S(x_1) = \theta_1, p_S(x_2) = \theta_2\}.$$

Alors, puisque la distance entre $\overline{x\alpha}$ et $\overline{x\beta}$ en $\Sigma_x\mathbf{K}$, $d_x(\overline{x\alpha}, \overline{x\beta}) =<_x (\alpha, \beta)$, coïncide avec la distance dans l'appartement qui les contient, on peut conclure que $<_x (\alpha, \beta) \in \delta(\theta_1, \theta_2)$, et ceci pour tout $x \in \mathbf{K}$. $\diamondsuit$

Remarque 2.20. *Dans un immeuble sphérique Σ, pour tout $x \in \Sigma$ et tout appartement A de Σ, x a un opposé en A. En effet, on peut joindre x à un point régulier de A par une géodésique et puis prolonger cette géodésique jusqu'à la longueur π.*

Une conséquence de ceci est que dans un immeuble euclidien $\mathbf{K}$ toute géodésique $[x, y]$ incidente à un appartement F de $\mathbf{K}$, c'est-à-dire telle que $x \in \mathbf{K}, y \in F$, peut être prolongée dans F. En effet, dans l'immeuble sphérique $\Sigma_y\mathbf{K}$, d'après la remarque précédente, $\overline{yx}$ a un opposé dans F_y, $\overline{yz}$. Ainsi $[y, z]$ est un prolongement de $[x, y]$ dans F.

2.4 Le cône asymptotique d'un espace symétrique

Si X est un espace symétrique irréductible de rang plus grand ou égal à 2, son bord à l'infini avec la métrique de Tits est un immeuble sphérique irréductible $\aleph_1$-épais ([**Mo**], chapitres 15 et 16, ou [**BGS**], Appendix 5).

Théorème 2.21 ([KlL]). *Tout cône asymptotique de X est un immeuble euclidien irréductible homogène $\aleph_1$-épais qui a comme appartements des plats qui sont des ensembles limites provenant de suites des plats maximaux de X. De même, les plats singuliers, les chambres de Weyl et leurs murs, les polytopes de Weyl sont des ensembles limites des suites d'objets du même type dans l'espace X. Ceci implique en particulier que $\partial_\infty \mathbf{K}$ et $\partial_\infty X$ ont le même complexe de Coxeter modèle.*

Dans ce cas particulier d'immeuble, on appelle parfois les appartements des plats maximaux.

Soit $\mathbf{K} = Con_\omega(X, (x_n), (d_n))$ un cône asymptotique de X. La structure d'immeuble euclidien de $\mathbf{K}$ entraîne une structure d'immeuble sphérique sur $\partial_\infty \mathbf{K}$ et le complexe de Coxeter modèle de $\partial_\infty \mathbf{K}$ est le même que celui de $\partial_\infty X$. On note S ce complexe de Coxeter. Si on fixe un marquage sur $\partial_\infty X$, celui-ci induit un marquage sur $\partial_\infty \mathbf{K}$, et on a une projection $P : \partial_\infty \mathbf{K} \to \Delta$, où Δ est la même chambre modèle que pour $\partial_\infty X$. Le complexe de Coxeter modèle S a un marquage compatible avec les deux marquages sur $\partial_\infty X$ et sur $\partial_\infty \mathbf{K}$, et on a aussi une projection $p_S : S \to \Delta$.

3 Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens

Soit (X, d) un espace métrique $CAT(0)$ et $r \subset X$ un rayon. *La fonction de Busemann associée au rayon r* est la fonction

$$f_r : X \to \mathbb{R},\ f_r(x) = \lim_{t\to\infty} (\, d(x, r(t)) - t\,).$$

Si r_1 et r_2 sont deux rayons asymptotes, alors $f_{r_1} - f_{r_2}$ est une fonction constante (Lemme 4.3).

Donc la famille d'ensembles de niveau $\{x \mid f_r(x) \le a\}$ et la famille d'hypersurfaces de niveau $\{x \mid f_r(x) = a\}$ de la fonction de Busemann ne dépend pas du rayon r mais seulement de son point à l'infini $\alpha = r(\infty)$.

On appelle un ensemble de niveau de la fonction de Busemann *horoboule centrée en α*. On appelle une hypersurface de niveau de la fonction de Busemann *horosphère centrée en α*. On appelle l'ensemble $\{x \mid f_r(x) < a\}$ *horoboule ouverte centrée en α*.

On note $Hb(r)$ l'horoboule $\{x \mid f_r(x) \le 0\}$ et on l'appelle *l'horoboule déterminée par le rayon r*. De même, on note $Hbo(r) = \{x \mid f_r(x) < 0\}$, qu'on appelle *l'horoboule ouverte déterminée par r* et $H(r) = \{x \mid f_r(x) = 0\}$, qu'on appelle *l'horosphère déterminée par r*.

Afin de voir quelles sont les horosphères nondistordues dans un immeuble euclidien, on étudie les formes des intersections des appartements avec une horoboule.

3.1 L'intersection d'un appartement avec une horoboule

3.1.1 Exemple Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien qui s'obtient comme un produit de deux arbres réels, $\mathbf{K} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

On étudie l'intersection d'une horoboule $Hb(\rho)$ avec un appartement F dans $\mathbf{K}$.

Le rayon ρ peut s'écrire comme $\rho(t) = (\rho_1(a_1 \cdot t), \rho_2(a_2 \cdot t))$, où $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

En utilisant la formule $f_\rho(y) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{D^2(y, \rho(t)) - t^2}{2t}$, on peut déduire facilement que :

$$f_\rho(y) = a_1 f_{\rho_1}(y_1) + a_2 f_{\rho_2}(y_2) \text{ où } y = (y_1, y_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2.$$

1) On suppose d'abord que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

L'appartement F est de la forme $R_1 \times R_2$. Chaque R_i peut être asymptote ou non à ρ_i. On peut donc avoir $f_{\rho_i} \circ R_i(t) = t + a$, si R_i est asymptote à ρ_i, ou $f_{\rho_i} \circ R_i(t) = a - |t - t_0|$, si R_i n'est pas asymptote à ρ_i et $R_i(t_0)$ est le point de R_i ou f_{ρ_i} atteint son maximum, a.

Avec ces remarques il n'est pas difficile de voir quelles sont les formes possibles de $F \cap Hb(\rho)$. Dans la Figure 1 on représente ces formes.

Figure 1

2) On se place maintenant dans la situation $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, donc $\rho(t) = (\rho_1(t), P_0)$.

Pour un appartement $F = R_1 \times R_2$ on a deux situations possibles : R_1 asymptote à ρ_1 ou non. Donc si $F \cap H(\rho) \neq \emptyset$, l'intersection peut avoir seulement deux formes, représentées dans la Figure 2.

Figure 2

3.1.2 On étudie l'intersection d'un appartement avec une horoboule dans le cas général. Dans la suite on fixe un rayon ρ dans l'immeuble euclidien. On note θ sa direction.

Proposition 3.1. *Dans un immeuble euclidien l'intersection entre une horoboule $Hb(\rho)$ et un appartement F est un polytope convexe dans F.*

Preuve. On introduit comme outil le rayon ρ^0 défini comme suit :

• si ρ a une direction régulière, $\rho^0 = \rho$

• si ρ a une direction singulière, on choisit une chambre de Weyl de sommet $\rho(0)$ qui contient ρ et un rayon régulier dans cette chambre, ρ^0.

On utilise un résultat sur la géométrie des immeubles euclidiens :

Lemme 3.2. *Soit $\mathbf{K}$ un immeuble euclidien, $F \subset \mathbf{K}$ un appartement et $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$ un point régulier à l'infini. Soient $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \ldots, \alpha_k^0\}$ les opposés de α dans $F(\infty)$. Pour chaque α_i^0 il existe un appartement unique F_i tel que $F_i(\infty)$ contient α_i^0 et α. Alors*

$$\textbf{(i)} F(\infty) = \bigcup_{i=1}^{k} [F(\infty) \cap F_i(\infty)].$$

$$\textbf{(ii)} F = \bigcup_{i=1}^{k} [F \cap F_i].$$

Preuve. Le fait que $F(\infty)$ contient seulement un nombre fini d'opposés de α et le fait que chaque opposé de α détermine avec α un seul appartement dans $\partial_\infty \mathbf{K}$ découle de la Remarque 2.8.

(i) On démontre $F(\infty) \subset \bigcup_{i=1}^{k} [F(\infty) \cap F_i(\infty)]$. Soit $\beta \in F(\infty)$ un point régulier quelconque. Si $\beta \notin \{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \ldots, \alpha_k^0\}$, alors la géodésique de α à β se prolonge en $F(\infty)$ jusqu'à la longueur π, donc jusqu'à ce qu'on arrive à un α_i^0. Alors $\beta \in F_i(\infty)$.

Soit $\beta \in F(\infty)$ point singulier. Alors β se trouve dans le bord d'une chambre $\mathcal{W}$. On choisit $\beta^0 \in \mathcal{W}$ point régulier. Il existe un $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ tel que $\beta^0 \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$. Donc $\mathcal{W} \subset F(\infty) \cap F_i(\infty)$, d'où $\beta \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$.

(ii) Soit un point $x \in F$ quelconque. D'après la Remarque 2.20, le rayon $[x, \alpha)$ peut être prolongé dans F à une géodésique $(\alpha, \alpha^0), \alpha^0 \in F(\infty)$. Donc α^0 se trouve parmi les opposés de α dans $F(\infty)$, $\alpha^0 = \alpha_i^0$, et $x \in F_i$. $\diamondsuit$

Dans notre cas $\rho^0(\infty)$ a les opposés $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$ dans $F(\infty)$. Pour chaque $i \in 1, 2 \ldots, k$, il existe un appartement unique F^i tel que $\rho^0(\infty), \alpha_i^0 \in F^i(\infty)$.

On a donc $F = \bigcup_{i=1}^{k} [F^i \cap F]$. Chaque $F^i \cap F$ est un polytope de Weyl convexe, d'après l'axiome **(2)** de l'immeuble euclidien.

D'autre part, $Hb(\rho) \cap F = \bigcup_{i=1}^{k}[Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$. Mais $Hb(\rho) \cap F^i$ est un demi-appartement, donc $Hb(\rho) \cap F^i \cap F$ est toujours un polytope convexe.

Alors $\bigcup_{i=1}^{k}[Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$ est une reunion de polytopes convexes et aussi un ensemble convexe, donc c'est un polytope convexe. $\diamondsuit$

Remarque 3.3. *Comme $Hb(\rho) \cap F$ est un polytope convexe et $H(\rho) \cap F$ est son bord topologique dans F,il s'ensuit que $H(\rho) \cap F$ est une hypersurface polytopique. Chaque F_i contient un rayon ρ_i asymptote à ρ. Supposons que ρ_i est tel que $f_{\rho_i} = f_\rho$. Alors l'hypersurface polytopique $H(\rho) \cap F$ est formée par des polytopes contenus dans des hyperplans déterminés par les rayons ρ_i dans les appartements F_i. En effet, $H(\rho) \cap F = \bigcup_{i=1}^{k}[H(\rho) \cap F^i \cap F]$ et chaque $H(\rho) \cap F^i$ est un hyperplan orthogonal à ρ_i qui passe par $\rho(0)$. Alors $H(\rho) \cap F^i \cap F$ est ou bien l'ensemble vide, ou bien un polytope contenu dans un hyperplan orthogonal à ρ_i.*

Supposons que F est un appartement tel que $F \cap Hb(\rho) \neq \emptyset$. Alors $\inf_F f_\rho \leq 0$. On a $\inf_F f_\rho > -\infty$ ou $\inf_F f_\rho = -\infty$. On étudie chacun de ces deux cas.

3.1.3 Premier cas $\inf_F f_\rho = -\infty$

On montre que dans ce cas $F \cap H(\rho)$ n'est pas distordu en F.

Avec la décomposition du lemme 3.2, on a que

$$\inf_F f_\rho = \min\{\inf_{F\cap F_1} f_\rho, \inf_{F\cap F_2} f_\rho, \cdots \inf_{F\cap F_k} f_\rho\}.$$

Donc il existe un $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ tel que $\inf_F f_\rho = \inf_{F\cap F_i} f_\rho$. Comme F_i est un appartement qui contient une asymptote de ρ, $F_i \cap Hb(\rho)$ est un demi-appartement. Alors $\inf_{F\cap F_i} f_\rho = -\infty$ implique que le polytope de Weyl $F_i \cap F$ contient un rayon r qui fait avec ρ un angle strictement plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Donc il existe un rayon $r \subset F$ tel que $d_T(r(\infty), \rho(\infty)) < \frac{\pi}{2}$, où d_T est la distance de Tits.

On peut conclure que $d_T(\rho(\infty), F(\infty)) < \frac{\pi}{2}$.

Soit $\beta \in F(\infty)$ tel que $d_T(\rho(\infty), F(\infty)) = d_T(\rho(\infty), \beta) < \frac{\pi}{2}$. Le point β est singulier, d'après la Proposition 2.10. Soit $\mathcal{M}$ le mur qui contient β à l'intérieur. On a $d_T(\rho(\infty), \mathcal{M}) = d_T(\rho(\infty), \beta) < \frac{\pi}{2}$. Dans un appartement de $\partial_\infty \mathbf{K}$ qui contient à la fois $\mathcal{M}$ et $\rho(\infty)$, $\mathcal{M}$ se trouve parmi les simplexes qui sont à une distance plus petite que $\frac{\pi}{2}$ de $\rho(\infty)$. D'après la Remarque 2.9, $d_T(\rho(\infty), \mathcal{M}) = d_T(\rho(\infty), \beta) = d_T(\rho(\infty), F) \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, où δ ne dépend que de θ.

On a $\beta \in F(\infty) = \bigcup_{i=1}^{k}[F(\infty) \cap F_i(\infty)]$, donc $\beta \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$ pour un $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Alors il existe un rayon $[O, \beta) \subset F \cap F_i$. Le fait que $d_T(\rho(\infty), \beta) \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ implique que f_ρ décroît strictement sur $[O, \beta)$ à partir d'un certain point.

On peut donc supposer que f_ρ décroît strictement sur $[O,\beta)$ et que $f_\rho(O) = -t_0 < 0$. On considère aussi le rayon opposé à $[O,\beta)$ dans F , $[O,\beta^{op})$, et on définit le $\frac{\delta}{2}$-cône autour de ce rayon, c'est-à-dire l'ensemble :

$$C\left(O, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) = \left\{ y \in \bar{F}; <_O (y, \beta^{op}) \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \text{ où } \bar{F} = F \cup F(\infty).$$

Lemme 3.4. *On a les deux inclusions suivantes :*

$$B(O,t_0) \cap F \subset Hb(\rho) \cap F \text{ et}$$

$$Hb(\rho) \cap C\left(O, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) \subset B(O, a't_0) \cap C\left(O, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right),$$

où $a' = \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$.

Preuve. La première inclusion est une conséquence du fait que f_ρ est contractante.

On démontre la deuxième inclusion. Soit r un rayon dans $C\left(O, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$, d'origine O. Alors on a
$<_O (\overline{r_O}, \overline{\rho_O}) =<_O (r(\infty), \rho(\infty)) \geq<_O (r(\infty), \beta)- <_O (\beta, \rho(\infty))$
$\geq \pi - \frac{\delta}{2} - d_T(\beta, \rho(\infty)) \geq (\pi - \frac{\delta}{2}) - (\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$.

Alors, d'après la Remarque 2.13 **b)**, la fonction convexe $f_\rho \circ r$ a, près de zéro, une vitesse de croissance plus grande que $\sin\frac{\delta}{2}$. Donc :

$$f_\rho \circ r(t) \geq -t_0 + t \cdot \sin\frac{\delta}{2}.$$

Ceci entraîne que le point $y \in r$ qui se trouve sur $H(\rho)$ doit vérifier la relation

$$-t_0 + d(O,y)\sin\frac{\delta}{2} \leq 0$$

, donc $d(O,y) \leq \frac{t_0}{\sin\frac{\delta}{2}}$. La démonstration est complète. ♢

Or on a le résultat suivant :

Lemme 3.5. *Soit $\mathcal{P}$ un polytope convexe dans un espace euclidien E, O un point à l'intérieur de $\mathcal{P}$, r un rayon issu de O et*
$C(O,r,\delta_0) = \{P \in E \mid <_O (OP, r) \leq \delta_0\}$ *un δ_0-cône, où $\delta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.*

Supposons qu'on a $B(O,R) \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap C(O,r,\delta_0) \subset B(O,aR) \cap C(O,r,\delta_0)$, où a est une constante. Soit $\mathcal{SP}$ l'hypersurface polytopique qui est le bord de $\mathcal{P}$. Alors:

- **a)** *Si on prend $\mathcal{SP}$ et $S(O,R)$ avec les métriques de longueur, la projection radiale $pr : \mathcal{SP} \cap C(O,r,\delta_0) \to S(O,R) \cap C(O,r,\delta_0)$ est L-bilipschitz, où L ne dépend que de a.*

- **b)** *Si on note d_ℓ la métrique de longueur sur $\mathcal{SP}$, on a :*

$$d_\ell(x,y) \leq k \cdot d(x,y), \forall x,y \in \mathcal{SP} \cap C(O,r,\delta_0), \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

Preuve.
Pour chaque paire de points $x, y \in \mathcal{SP} \cap C\,(O, r, \delta_0)$ on considère le plan (Oxy). La section avec ce plan donne la situation de la Figure 3.

Figure 3

Dans ce plan et dans les coordonnées polaires la métrique euclidienne s'exprime comme $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, ce qui implique que $d(x, y) \geq d(x', y')$, où $x' = pr(x), y' = pr(y)$. Donc :

$$d_\ell(x, y) \geq d(x, y) \geq d(x', y') \geq \frac{2}{\pi} d_\ell(x', y') \tag{3.1}$$

Pour l'inégalité inverse, on remarque d'abord que pour tout segment $[A, B]$ inclus dans la ligne polygonale entre x et y qui se trouve dans l'intersection du plan (Oxy) avec $\mathcal{SP} \cap C\,(O, r, \delta_0)$ on a $d(O, AB) \geq R$, dû au fait que le polygone est convexe, et

$$\varphi =<_B (A, O) = \arcsin \frac{d(O, AB)}{d(O, B)} \geq \arcsin \frac{R}{a \cdot R} = \arcsin \frac{1}{a} .$$

On note $\arcsin \frac{1}{a}$ avec φ_0. On a $\varphi \geq \varphi_0$ donc :
$r_B - r_A \leq d(A, B) \cos \varphi \leq d(A, B) \cos \varphi_0$, où $r_A = d(O, A), r_B = d(O, B)$.

Alors, si on note $\mathcal{L}$ la ligne polygonale entre x et y et x'' et y'' les projections radiales de x et y sur $S(O, aR)$, on a :

$$\text{longueur}\mathcal{L} = \int_{\mathcal{L}} (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{\mathcal{L}} dl \cos \varphi_0 + \int_{\mathcal{L}} a \cdot R d\theta$$

$$= \cos \varphi_0 \cdot \text{longueur}\mathcal{L} + d_\ell(x'', y'') \Rightarrow \text{longueur}\mathcal{L} \leq \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} d_\ell(x'', y'')$$

Donc $d_\ell(x, y) \leq \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} d_\ell(x'', y'') \leq \frac{1}{a(1 - \cos \varphi_0)} d_\ell(x', y')$ (3.2)

Les relations (3.1) et(3.2) impliquent **a)** et **b)**. ◊

Ce lemme a une conséquence immédiate pour le cas des polytopes fermés:

Corollaire 3.6. *Soit $\mathcal{P}$ un polytope convexe fermé dans un espace euclidien E et O un point à l'intérieur de $\mathcal{P}$. Supposons qu'on a $B(O, R) \subset \mathcal{P} \subset B(O, aR)$, où a est une constante. Soit $\mathcal{SP}$ l'hypersurface polytopique qui est le bord de $\mathcal{P}$. Alors:*

a) *Si on prend $\mathcal{SP}$ et $S(O, R)$ avec les métriques de longueur, la projection radiale $pr : \mathcal{SP} \to S(O, R)$ est L-bilipschitz, où L ne dépend que de a .*

b) *Si on note d_ℓ la métrique de longueur sur $\mathcal{SP}$, on a :*

$$d_\ell(x,y) \leq k \cdot d(x,y), \forall x,y \in \mathcal{SP}, \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

Le lemme 3.5 permet de conclure que dans le cas considéré $F \cap H(\rho)$ avec sa métrique de longueur est nondistordue en F.

Plus précisément, dans ce cas $F \cap H(\rho)$ a la propriété suivante

($\mathbf{P}_0$) Pour tout $x, y \in F \cap H(\rho)$ on peut trouver dans $F \cap H(\rho)$ une ligne polygonale $\mathcal{L}(x,y)$ entre x et y telle que
$$\mathrm{long}\mathcal{L}(x,y) \leq kd(x,y),$$
où k ne dépend que de θ.

Preuve. On note O_t le point de $[O,\beta)$ tel que $f_\rho(O_t) = -t$.
Evidemment $\bar{F} = \bigcup_{t\geq 0} C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$. On utilise ceci pour démontrer ($\mathbf{P}_0$).

On considère $x, y \in F \cap H(\rho)$ et t suffisamment grand pour que $[x,y] \subset C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$. L'intersection $\mathcal{P} = F \cap Hb(\rho)$ est un polytope convexe dans F tel que $B(O_t, t) \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right) \subset \ B(O_t, a't) \cap C\left(O_t, \beta^{op}, \frac{\delta}{2}\right)$.

On applique le Lemme 3.5 **a)**. ◊

3.1.4 Deuxième cas $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$

Comme $\inf_F f_\rho = \min\{\inf_{F\cap F_1} f_\rho, \inf_{F\cap F_2} f_\rho, \cdots \inf_{F\cap F_k} f_\rho\}$, avec les notations du lemme 3.2, il résulte que $\inf_{F\cap F_i} f_\rho = -\mu$, pour un $i \in \{1,2,\cdots k\}$ et il n'est pas difficile de voir que la valeur $-\mu$ est effectivement atteinte en au moins un point de $F \cap F_i$.

On cherche la forme de l'ensemble $\{P \in F \mid f_\rho(P) = -\mu\}$. Supposons qu'on a au moins deux points dans cet ensemble, $P \in F$, $P_1 \in F$ tels que $f_\rho(P) = -\mu$, $f_\rho(P_1) = -\mu$. Comme le segment $[P, P_1]$ est contenu dans F et f_ρ est convexe, on a $f_\rho(x) = -\mu, \forall x \in [P, P_1]$.

Lemme 3.7. *Soit* $\mathbf{K}$ *un immeuble euclidien, $\rho \subset \mathbf{K}$ un rayon et F un appartement de* $\mathbf{K}$. *Si f_ρ atteint sa valeur minimale sur F sur un segment $[P, P_1] \in F$, alors le segment $[P, P_1]$ est inclus dans un plat singulier de F.*

Preuve. Soit $-\mu = \inf_F f_\rho > -\infty$.

On fixe un point x à l'intérieur du segment $[P, P_1]$ et on considère l'immeuble des directions dans $x, \Sigma_x\mathbf{K}$.

On note ρ_x le rayon $[x, \rho(\infty))$. La Remarque 2.13 implique que ρ_x et un sous-segment de $[x, P]$ délimitent une bande euclidienne. Du fait que f_ρ est constante égale à -μ sur $[x, P]$, on déduit que $<_x (\overline{xP}, \overline{\rho_x}) = \frac{\pi}{2}$. Par un raisonnement analogue on déduit que $<_x (\overline{xP_1}, \overline{\rho_x}) = \frac{\pi}{2}$. Les directions $\overline{xP}$ et $\overline{xP_1}$ étant opposés dans l'immeuble sphérique $\Sigma_x\mathbf{K}$, il en résulte que $\overline{\rho_x}$ se trouve sur une géodésique de $\overline{xP}$ à $\overline{xP_1}$ dans l'immeuble sphérique $\Sigma_x\mathbf{K}$

Si $\overline{xP}$ et $\overline{xP_1}$ sont des points réguliers, le fait que $\overline{\rho_x}$ se trouve sur une géodésique de $\overline{xP}$ à $\overline{xP_1}$ implique qu'il se trouve dans l'unique appartement qui contient $\overline{xP}$ et $\overline{xP_1}$ qui est F_x dans ce cas. Alors, d'après la Remarque 2.13, un sous-segment du rayon $[x, \rho(\infty))$ est inclus dans F; or en tous les points de ce sous-segment différents de x, f_ρ prend une valeur strictement plus petite que $f_\rho(x) = -\mu$, d'où la contradiction.

Donc $\overline{xP}$ et $\overline{xP_1}$ sont des points singuliers dans l'immeuble sphérique $\Sigma_x\mathbf{K}$, d'où la conclusion de ce lemme. $\diamondsuit$

On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des points $P \in F$ tels que $f_\rho(P) = \inf_F f_\rho$.

Lemme 3.8. *L'ensemble $\mathcal{V}$ est un polytope de Weyl singulier, c'est-à-dire un polytope dans un plat singulier ayant comme hyperplans d'appui des intersections de ce plat singulier avec des hyperplans singuliers.*

Preuve. Soit $P \in \mathcal{V}$. Dans $\Sigma_P\mathbf{K}$ on peut définir $\Sigma_P\mathcal{V} = \{\overline{PQ}; Q \in \mathcal{V}\setminus\{P\}\}$. On peut voir facilement que $\Sigma_P\mathcal{V} = \{\overline{PQ}; <_P (\overline{PQ}, \overline{\rho_P}) = \frac{\pi}{2}\}$, où $\rho_P = [P, \rho(\infty))$.

(A) La Remarque 2.13 b et la convexité de la fonction f_ρ entraînent que $\Sigma_P\mathcal{V}$ est un ensemble convexe.

(B) Le Lemme précédent implique que tous les $\overline{PQ}$ se trouvent dans un même plat singulier.

(C) Pour tout $Q \in \mathcal{V}$ on a $<_P (\overline{PQ}, \overline{\rho_P}) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $\bar{u} \in F_P$ on a $<_P (\bar{u}, \overline{\rho_P}) \geq \frac{\pi}{2}$. La Proposition 2.10 entraîne alors que $\Sigma_P\mathcal{V}$ contient avec chaque $\overline{PQ}$ le mur à l'intérieur duquel il se trouve. Donc $\Sigma_P\mathcal{V}$ est un sous-complexe simplicial convexe de F_P.

Les trois propriétés (A), (B), (C) impliquent que $\Sigma_P\mathcal{V}$ est un polytope de Weyl singulier dans $\Sigma_P\mathbf{K}$. Ceci est vrai pour tout $P \in \mathcal{V}$, et $\mathcal{V}$ est un ensemble convexe, d'où la conclusion.

$\diamondsuit$

Supposons que l'ensemble $\mathcal{V}$ se réduit à un point qu'on note O. Dans ce cas on peut préciser encore la forme de $F \cap Hb(\rho)$. On sait déjà que c'est un polytope.

L'inégalité $|f_\rho(x) - f_\rho(y)| \leq d(x, y)$ entraîne que $B(O, \mu) \subset F \cap Hb(\rho)$.

D'autre part, dans $\Sigma_O\mathbf{K}$, à cause du fait que O est un minimum strict de f_ρ sur F, toutes les directions de F_O font avec ρ_O un angle $> \frac{\pi}{2}$. Donc chaque chambre $W_O \subset F_O$, dans l'appartement qui contient W_O et $\overline{\rho_O}$, vérifie $d_O(\overline{\rho_O}, W_O) > \frac{\pi}{2}$. D'après la Remarque 2.9, ceci entraîne que $d_O(\overline{\rho_O}, W_O) \geq \frac{\pi}{2} + \delta'$. Ainsi toutes les directions de F_O font avec $\overline{\rho_O}$ un angle $\geq \frac{\pi}{2} + \delta'$. Ceci et la Remarque 2.13 entraînent que pour tout rayon $r \subset F$ d'origine O la fonction convexe $f_\rho \circ r$ possède, au voisinage de zéro, une vitesse de croissance plus grande que $\sin\delta'$. D'où $f_\rho \circ r(t) \geq -\mu + t \cdot \sin\delta'$. Alors si y est le point du rayon r qui se trouve sur $H(\rho)$ il doit vérifier la relation $-\mu + d(O, y) \cdot \sin\delta' \leq 0$, donc $d(O, y) \leq \frac{\mu}{\sin\delta'}$.

On a obtenu $B(O, \mu) \subset F \cap Hb(\rho) \subset B(O, \frac{\mu}{\sin\delta'})$.

Le corollaire 3.6 permet de conclure que dans ce cas aussi $F \cap H(\rho)$ vérifie la propriété $(\mathbf{P}_0)$.

Mais on a aussi une deuxième forme possible pour $F \cap H(\rho)$, qui correspond à la situation où $\mathcal{V}$ contient au moins deux points : des “bandes” ou des “hyperprismes”.

Figure 4

Par exemple, si $\mathbf{K}$ est de rang 2, si les appartements ont les droites singulières comme dans la Figure 4 et si ρ est un rayon singulier, parmi les formes que $F \cap Hb(\rho)$ peut avoir, outre que des demi-appartements, on a celles de la Figure 5 a, b, c, qui correspondent aux cas $\inf_F f_\rho = -\infty$, $\inf_F f_\rho > -\infty$ et il est atteint en un seul point, et $\inf_F f_\rho > -\infty$ et il est atteint en plusieurs points.

Figure 5

Dans les cas a) et b), on l'a déjà vu en toute généralité et il est évident sur les figures, $F \cap H(\rho)$ est nondistordue dans F. Dans le cas c) on remarque qu'on ne peut pas relier deux points x et y de $F \cap H(\rho)$ par une ligne polygonale de longueur comparable à $d(x, y)$ tout en restant dans $F \cap H(\rho)$. Au contraire, il faut quitter l'appartement F pour trouver une telle ligne.

Si on reprend l'exemple discuté au début de la section 3.1, pour le cas 1) on a une horosphère nondistordue. Dans le cas 2), parmi les formes possibles pour $F \cap Hb(\rho)$ apparaissent des bandes qu'on ne peut pas "traverser", même en quittant l'appartement F, contrairement à ce qui se passe pour les bandes de l'exemple précédent. Dans ce cas $F \cap H(\rho)$ est même disconnexe.

Donc, en fait, pour assurer la nondistorsion des horosphères, il est nécessaire et suffisant de mettre une condition sur ρ de sorte que parmi les formes possibles pour $F \cap Hb(\rho)$ n'apparaissent pas des bandes "qu'on ne peut pas traverser". Dans la section suivante on énonce une telle condition.

3.2 Nondistorsion des horosphères

Dans cette section on démontre le résultat suivant

Théorème 3.9. *Soit* $\mathbf{K}$ *un immeuble euclidien* 4*-épais de rang plus grand ou égal à* 2 *et soit* $\rho \subset \mathbf{K}$ *un rayon. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*
$(\mathbf{P}_1)$ $H(\rho)$ *avec la métrique de longueur est nondistordue dans* $\mathbf{K}$ *;*
$(\mathbf{P}_2)$ $H(\rho)$ *est connexe ;*
$(\mathbf{P}_3)$ *pour toute décomposition nontriviale* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ *telle que rang* $\mathbf{K}_1 = 1$,
$\rho \not\subset \mathbf{K}_1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in \mathbf{K}_2$.
Si ρ *vérifie une de ces trois propriétés, la constante de nondistorsion de* $H(\rho)$ *avec la métrique de longueur ne dépend que de* $P(\rho(\infty)) = \theta$.

On commence par prouver un résultat plus faible :

Théorème 3.10. *Soit* $\mathbf{K}$ *un immeuble euclidien* 4*-épais de rang plus grand ou égal à* 2 *et soit* $\rho \subset \mathbf{K}$ *un rayon qui vérifie la propriété géométrique suivante :*
$(\mathcal{I})$ *pour toute décomposition non triviale* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$, $\rho \not\subset \mathbf{K}_1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in \mathbf{K}_2$.
Alors il existe un M *positif qui ne dépend que de* $P(\rho(\infty)) = \theta$, *tel que l'horosphère* $H(\rho)$ *munie de la métrique de longueur est* M*-nondistordue dans* $\mathbf{K}$.

Preuve du théorème 3.10.

Soient x et y deux points de $H(\rho)$. Il existe un appartement F qui contient $[x, y]$.

F se trouve dans un des trois cas suivants :

(a) $\inf_F f_\rho = -\infty$;

(b) $\inf_F f_\rho > -\infty$ et il est atteint en un point unique de F ;

(c) $\inf_F f_\rho > -\infty$ et il est atteint en plusieurs points de F.

On a discuté les cas **(a)** et **(b)** et on a vu que dans ces cas $d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$, où k ne dépend que de θ. Il reste à discuter le cas **(c)**.

On se place donc dans ce cas.

On démontre l'inégalité : $(\mathcal{IN})$ $d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$, où d_ℓ est la métrique de longueur de $H(\rho)$, par récurrence sur la dimension de $\mathcal{V} = \{P \in F; f_\rho(P) = \inf_F f_\rho\}$.

Plus précisément, on démontre :
$(\mathbf{P_i})$ *Pour chaque paire de points* x *et* y *de* $H(\rho)$ *telle que* $[x, y]$ *se trouve dans un appartement* F *pour lequel* $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$ *et l'ensemble* $\mathcal{V} = \{P \in F; f_\rho(P) = -\mu\}$ *est de dimension* i, *on a l'inégalité* :

$$(\mathcal{IN}_i) \qquad d_\ell(x, y) \leq k_i \cdot d(x, y)$$

, où k_i *est une constante positive qui dépend de* i.

Pour $i = 0$ la propriété est déjà démontrée, car si $\dim\mathcal{V} = 0$ on se trouve dans le cas **(b)**. Supposons que $(\mathbf{P_j})$ est vraie pour $j \leq i$. On se place dans le cas $(\mathbf{P_{i+1}})$: une paire de points $x, y \in F \cap H(\rho)$, où F est un appartement ayant $\dim\mathcal{V} = i + 1$. On choisit parmi les appartements qui contiennent $[x, y]$ celui ayant $\mathcal{V}$ de dimension minimale. Si on trouve un appartement F ayant $dim\mathcal{V} \leq i$, alors on peut conclure, par l'hypothèse de récurrence. Supposons que $dim\mathcal{V} = i + 1$.

On réduit la preuve de l'inégalité $(\mathcal{IN})$ pour x et y à la preuve de l'inégalité similaire pour une paire de points qui se trouve dans un appartement ayant $\dim\mathcal{V} \leq i$. On fait ceci en deux étapes :

Première étape : On choisit dans F un “bon” hyperplan singulier. On démontre qu'il existe un appartement qui contient cet hyperplan et qui a dim$\mathcal{V} \leq i$.

Deuxième étape : On réduit la preuve de l'inégalité $(\mathcal{IN})$ pour $x, y \in F$ à la preuve de l'inégalité $(\mathcal{IN})$ pour une paire de points x', y' qui se trouve dans l'hyperplan choisi, donc dans un appartement ayant dim$\mathcal{V} \leq i$.

3.2.1 Première étape : Soit Φ le plat singulier minimal de F qui contient $\mathcal{V}$. La dimension de Φ est $i+1$; ceci découle de la propriété (C) de $\mathcal{V}$.

Soit $P \in \mathrm{Int}_\Phi \mathcal{V}$, où $\mathrm{Int}_\Phi \mathcal{V}$ est l'intérieur de $\mathcal{V}$ dans Φ, et soit σ un mur de sommet P et de dimension $i+1$ de Φ. Soit W une chambre de Weyl adjacente à Φ de sommet P et qui contient σ. La propriété géométrique $(\mathcal{I})$ que vérifie ρ implique le résultat suivant:

Lemme 3.11. *Parmi les hyperplans singuliers adjacents à W, il existe un hyperplan H^0 qui ne contient pas Φ et n'est pas orthogonal à Φ.*

Preuve. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel hyperplan. Alors les deux classes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ définies dans la suite constituent une partition pour l'ensemble des hyperplans singuliers adjacents à W :

$$\mathcal{H}_1 = \{H; \Phi \subset H\}; \quad \mathcal{H}_2 = \{H'; \Phi \not\subset H', \Phi \perp H'\}.$$

On voit que $H \perp H', \forall H \in \mathcal{H}_1, \forall H' \in \mathcal{H}_2$. Cette décomposition de l'ensemble des hyperplans adjacents à une chambre entraîne que le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble se décompose aussi en $E = E_1 \times E_2$ et que l'immeuble se décompose en un produit de deux immeubles $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$, où $\mathbf{K}_i$ est un immeuble euclidien de complexe de Coxeter modèle E_i. .

Comme $P \in \mathrm{Int}_\Phi \mathcal{V}$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\sigma \cap B(P, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$. Alors la fonction f_ρ est constante sur $\sigma \cap B(P, \varepsilon)$, d'où $<_P (\overline{\rho_P}, \overline{PQ}) = \frac{\pi}{2}, \forall \overline{PQ} \in \sigma_P$. Soit $[P, Q] \subset \sigma$ tel que $\overline{PQ}$ se trouve à l'intérieur de σ_P. La Remarque 2.13 b implique qu'il existe un appartement F' qui contient ρ_P et $[P, Q]$, ou éventuellement un sous-segment. Alors F' contient aussi $\sigma \cap B(P, \varepsilon)$ pour ε suffisamment petit.

La deuxième axiome d'un immeuble euclidien entraîne qu'il existe un isomorphisme $i_{F,F'}$ de F sur F' qui préserve les hyperplans singuliers et qui fixe $F \cap F'$. Donc si $\Phi' = i_{F,F'}(\Phi)$, alors $\sigma \cap B(P, \varepsilon) \subset \Phi'$ et ρ_P est orthogonal à Φ', d'après la Proposition 2.10.

Aussi, si on considère la chambre de Weyl de sommet P adjacente à Φ', $W' = i_{F,F'}(W)$, les hyperplans singuliers adjacents à cette chambre se séparent, comme dans F, en deux familles orthogonales $\mathcal{H}'_1$ et $\mathcal{H}'_2$. Comme $\rho_P \perp \Phi$, il en découle que $\rho_P \subset H', \forall H' \in \mathcal{H}'_2$. Ceci implique que $\rho_P \subset \{P\} \times \mathbf{K}_2$, ce qui contredit la propriété $(\mathcal{I})$. $\diamondsuit$

Lemme 3.12. *Soit H un hyperplan singulier parallèle à H^0. D'après la 4-épaisseur de l'immeuble $\mathbf{K}$, la paire de demi-appartements déterminés par H dans F est contenue dans une famille $\mathcal{D}$ d'au moins 4 demi-appartements de bord H et d'intérieurs deux à deux disjoints.*

Si $H\cap\mathcal{V}\neq\emptyset$, alors tous les demi-appartements D de la famille $\mathcal{D}$ ont $\inf\limits_D f_\rho=-\mu$ et tous les demi-appartements de la famille $\mathcal{D}$, sauf au plus deux, ont $\mathcal{V}_D=\{P; f_\rho(P)=\inf\limits_D f_\rho\}$ de dimension au plus i.

Preuve. Soit D un demi-appartement de F de bord H tel que $\mathcal{V}_D=\mathcal{V}\cap D$ est de dimension $i+1$. Alors, vu la manière dont on a choisi H, on a $\mathcal{V}\cap D\not\subset\mathcal{V}\cap H$.

S'il existe un demi-appartement $D'\in\mathcal{D}$ ayant $\inf\limits_{D'} f_\rho=-\mu_1<\inf\limits_H f_\rho$, alors D et D' forment un appartement et si $P\in\mathcal{V}_{D'}, Q\in\mathcal{V}_D\setminus H$ il existe un $R\in(P,Q)\cap H$. On a

$$f_\rho(R)\leq t\cdot f_\rho(P)+(1-t)\cdot f_\rho(Q)=t\cdot(-\mu_1)+(1-t)\cdot(-\mu)<\inf_H f_\rho.$$

On obtient une contradiction. Donc tous les demi-appartements $D'\in\mathcal{D}$ ont $\inf\limits_{D'} f_\rho=-\mu$.

Supposons que, à part D, il existe encore deux demi-appartements de la famille $\mathcal{D}$ tels que le $\mathcal{V}_D$ est de dimension $i+1$; notons-les D_1 et D_2.

Les ensembles $F_1=D\cup D_1$, $F_2=D\cup D_2$, $F_{12}=D_1\cup D_2$ sont des appartements. On note $\mathcal{V}_i=\mathcal{V}_{F_i}$ et $\mathcal{V}_{12}=\mathcal{V}_{D_1}\cup\mathcal{V}_{D_2}=\{P\in F_{12}; f_\rho(P)=\inf\limits_{F_{12}} f_\rho\}$. L'ensemble $\mathcal{V}_{D_1}$ est un polyèdre de Weyl singulier de dimension $i+1$. Comme $\mathcal{V}_1=\mathcal{V}_{D_1}\cup\mathcal{V}_D$ est un polyèdre de Weyl singulier de dimension $i+1$ inclus dans un plat singulier de dimension $i+1$, il en découle que $\mathcal{V}_{D_1}$ est inclus dans le demi-plat singulier qui est la prolongation de $\Phi\cap D$ dans D_1.

De même on trouve que $\mathcal{V}_{D_2}$ est inclus dans le demi-plat singulier qui est la prolongation de $\Phi\cap D$ dans D_2.

Mais Φ n'est pas symétrique par rapport à H, donc la prolongation de $\Phi\cap D$ dans D_1 et la prolongation de $\Phi\cap D$ dans D_2 ne sont pas deux demi-plats singuliers opposés. Ceci contredit le fait que $\mathcal{V}_{12}=\mathcal{V}_{D_1}\cup\mathcal{V}_{D_2}$ est un polyèdre de Weyl singulier de dimension $i+1$ inclus dans un plat singulier de dimension $i+1$.

Donc il existe au plus un demi-appartement $D'\in\mathcal{D}\setminus\{D\}$ ayant $\mathcal{V}_D=\{P; f_\rho(P)=\inf\limits_D f_\rho\}$ de dimension $i+1$. $\diamondsuit$

Conséquence On peut se placer dans le cas où il existe un $z\in[x,y]$ tel que l'hyperplan H parallèle à H^0 qui passe par z rencontre $\mathrm{Int}_\Phi\mathcal{V}$.

Preuve. Soient H^x et H^y les hyperplans parallèles à H^0 qui passent par x et y, respectivement.

Supposons qu'un d'entre eux sépare (x,y) et $\mathrm{Int}_\Phi\mathcal{V}$. Alors il existe un hyperplan H parallèle à H^0 qui sépare (x,y) et $\mathrm{Int}_\Phi\mathcal{V}$ et tel que le demi-appartement D de F de bord H qui contient (x,y) vérifie $\inf\limits_D f_\rho=\inf\limits_F f_\rho=-\mu$, $\dim(\mathcal{V}\cap D)\leq i$.

Le Lemme 3.12 implique qu'il existe un demi-appartement D' de bord H et tel que $D'\cap F=H$, ayant $\inf\limits_{D'} f_\rho=\inf\limits_F f_\rho=-\mu$, $\dim\mathcal{V}_{D'}\leq i$. Alors $F'=D\cup D'$ est un appartement qui contient $[x,y]$ tel que $\inf\limits_{F'} f_\rho=-\mu$ est atteint dans un ensemble $\mathcal{V}=\mathcal{V}_D\cup\mathcal{V}_{D'}$ de dimension au plus i, ce qui contredit le choix de F.

Si ni H^x ni H^y ne séparent (x,y) et $\mathrm{Int}_\Phi\mathcal{V}$, il existe un $z\in(x,y)$ tel que l'hyperplan H^z parallèle à H^0 qui passe par z rencontre $\mathrm{Int}_\Phi\mathcal{V}$. $\diamondsuit$

Dans la suite on note H^z par H.

3.2.2 DEUXIÈME ÉTAPE : On réduit la preuve de l'inégalité $(\mathcal{IN})$ pour x et y à la preuve de $(\mathcal{IN})$ pour une paire x' et y' dans $H \cap H(\rho)$. Pour ceci on a besoin d'un résultat simple sur les hyperplans de symétrie dans un complexe de Coxeter.

Lemme 3.13. *Soit S un complexe de Coxeter et $p_S : S \to \Delta$ sa projection définie par un marquage fixé, soit $\mathcal{W}$ une chambre, $\mathcal{M}$ un de ses murs de codimension 1, et σ un autre mur qui n'est pas contenu dans $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{H}$ est l'hyperplan singulier qui contient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{H}'$ est un hyperplan qui contient σ, alors $p_S(\mathcal{H}) \not\subset p_S(\mathcal{H}')$.*

Preuve. Si $p_S(\mathcal{H}) \subset p_S(\mathcal{H}')$, alors $\mathcal{H}'$ contient un mur de codimension 1, donc c'est un hyperplan singulier. Par des symétries qui préservent σ on peut transformer $\mathcal{H}'$ en un hyperplan adjacent à $\mathcal{W}$, donc on suppose qu'on est déjà dans ce cas.
L'hyperplan $\mathcal{H}'$ contient un mur de codimension 1 de $\mathcal{W}$, différent de $\mathcal{M}$ car il contient σ, qu'on note $\mathcal{M}'$.

Les symétries par rapport aux hyperplans adjacents de $\mathcal{W}, \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, engendrent le groupe de Weyl du complexe S. On note s et s' les symétries par rapport à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, respectivement.

Du fait que $p_S(\mathcal{M}) \subset p_S(\mathcal{H}')$, il découle qu'il existe un élément g du groupe de Weyl tel que $g\mathcal{M} \subset \mathcal{H}'$, donc tel que $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.
On prend g de longueur minimale, $g = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_l}$. On sait alors que la suite de chambres : $\mathcal{W}, s_{i_1}\mathcal{W}, s_{i_1}s_{i_2}\mathcal{W}, \ldots, s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_l}\mathcal{W}$ est une galerie minimale entre $\mathcal{W}$ et $g\mathcal{M}$. Cette galerie traverse tous les hyperplans singuliers qui séparent $\mathcal{W}$ et $g\mathcal{M}$, donc $\mathcal{W}$ et $g\mathcal{W}$, $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_l\}$, et seulement ces hyperplans ([**Br**], p.73, propriété (c)).

$\mathcal{W}$ et $g\mathcal{M}$ ne sont pas séparés par $\mathcal{H}'$ et on peut supposer aussi qu'ils ne sont pas séparés par $\mathcal{H}$, car sinon on échange $\mathcal{W}$ avec $s\mathcal{W}$. Ainsi $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ ne se trouvent pas parmi les $\mathcal{H}_i$. Alors $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$, d'où $s' = gsg^{-1}$, ce qui implique $s'g = gs$. Il vient $s'g\mathcal{W} = gs\mathcal{W}$.
Mais $s'g\mathcal{W}$ est séparé de $\mathcal{W}$ seulement par les hyperplans $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_l, \mathcal{H}'$, tandis que $gs\mathcal{W}$ est séparé de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{H}$ aussi. D'où la contradiction.

$\diamondsuit$

Dans la suite on choisit une bonne direction dans l'hyperplan singulier H qu'on a trouvé dans la première étape.

Lemme 3.14. *Soit S le complexe de Coxeter associé à $\partial_\infty \mathbf{K}$ et à $\Sigma_x \mathbf{K}, \forall x \in \mathbf{K}$ et soit $p_S : S \to \Delta$. Soit $q_0 \in S$ tel que $p_S(q_0) = \theta$. Si on prend l'hyperplan orthogonal à q_0,*

$$\mathcal{H}' = \{q \in S; d_S(q, q_0) = \tfrac{\pi}{2}\},$$

$\psi \subset \mathcal{H}'$ le plat singulier qui correspond aux directions du plat singulier Φ et $\mathcal{H}$ l'hyperplan singulier adjacent à une même chambre que ψ qui correspond aux directions de H^0 . Alors il existe $\alpha \in p_S(\mathcal{H})$ tel que pour tout $q \in \mathcal{H}$ avec $p_S(q) = \alpha$ on a :

$$d_S(q, \mathcal{H}') \geq \varepsilon > 0, \text{ où } \varepsilon \text{ ne dépend que de } \theta \text{ et de } \mathcal{H}.$$

Preuve. D'après le lemme précédent, $p_S(\mathcal{H}) \not\subset p_S(\mathcal{H}')$ et p_S est une contraction. $\diamondsuit$

On finit la démonstration par récurrence du théorème 3.10 en ramenant la preuve de l'inégalité $(\mathcal{IN})$ pour x et y à la preuve de $(\mathcal{IN})$ pour une paire x' et y' dans $H \cap H(\rho)$.

On considère une droite $d \subset H$ qui passe par z, de direction α, c'est-à-dire telle que si r et r' sont les rayons déterminés sur d par z, un de ces deux rayons a la direction α. Dans l'appartement F on considère le plan qui contient $[x, y]$ et d. Ce plan coupe $H(\rho)$ selon une ligne polygonale (voir la Figure 6). Soient $[x, A]$ et $[y, B]$ des segments de cette ligne polygonale qui passent par x et y. La droite support de $[x, A]$, d_x, coupe la droite d en un point u. Elle ne peut pas être parallèle à d car alors un des deux rayons déterminés sur d_x par x aurait à la fois sa direction égale à α et dans $p_S(\mathcal{H}')$, ce qui est impossible. De même, la droite support de $[y, B]$ coupe d en un point v.

La ligne polygonale elle-même coupe d en x' et y' (Figure 6).

Figure 6

On a $p_u(\overline{ux}) = p_x(\overline{xu}) \in p_S(\mathcal{H}')$ et $p_u(\overline{uz}) = p_z(\overline{zu}) = \alpha$, d'où $<_u (x, z) \geq \varepsilon$. De même, $<_v (y, z) \geq \varepsilon$.

Il s'ensuit que

$$d(x, u) + d(u, z) \leq C_1 \cdot d(x, z), \tag{3.3}$$

où $C_1 = \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$, et de même que :

$$d(y, v) + d(v, z) \leq C_1 \cdot d(y, z). \tag{3.4}$$

L'addition des deux relations ci-dessus nous donne :

$$d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \leq C_1 d(x, y). \tag{3.5}$$

Le segment $[x', y']$ est inclus dans $H \cap Hb(\rho)$. Or, d'après le Lemme 3.12, il existe deux demi-appartements d'intérieurs disjoints et de bord H, D et D', tels que $\inf_D f_\rho = \inf_{D'} f_\rho = -\mu$ et $\dim \mathcal{V}_D$, $\dim \mathcal{V}_{D'} \leq i$.

Alors l'appartement $F' = D \cup D'$ a un $\mathcal{V}'$ de dimension plus petite ou égale à i, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $d_\ell(x', y') \leq k_i \cdot d(x', y')$.

D'autre part, on a :

$$d_\ell(x, y) \leq d_\ell(x, x') + d_\ell(x', y') + d_\ell(y', y) \leq k_i \cdot (d_\ell(x, x') + d(x', y') + d_\ell(y', y)) \tag{3.6}$$

Or on voit que :

$$d_\ell(x, x') + d(x', y') + d_\ell(y, y') \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y). \tag{3.7}$$

Les relations (3.5), (3.6) et (3.7) impliquent que :

$$d_\ell(x,y) \le C_1 \cdot k_i \cdot d(x,y).$$

Donc on a prouvé $(\mathbf{P_{i+1}})$ avec $k_{i+1} = C_1 \cdot k_i$. $\diamondsuit$

Remarque 3.15. *On signale la différence essentielle entre les cas* **(a)** *et* **(b)** *d'une part et le cas* **(c)** *de l'autre part. Si on prend une paire de points x et y dans $H(\rho) \cap F$ qui se trouve dans les cas* **(a)** *ou* **(b)***, alors on peut trouver une ligne polygonale entre x et y de longueur comparable à $d(x,y)$ toujours dans $H(\rho) \cap F$, tandis que si x et y sont dans le cas* **(c)***, on peut être forcé de quitter l'appartement F pour trouver une telle ligne polygonale dans $H(\rho)$ entre x et y.*

3.2.3 Preuve du théorème 3.9.

L'implication $(\mathbf{P}_1) \Rightarrow (\mathbf{P}_2)$ est évidente. On commence la démonstration des autres implications par une remarque.

Remarque 3.16. *Soit X un espace métrique $CAT(0)$ qui se décompose $X = X_1 \times X_2$, où X_i sont des espaces métriques $CAT(0)$. Pour tout rayon $\rho \subset X_1 \times \{x_2\}, x_2 \in X_2$, c'est-à-dire tel que $\rho(t) = (\rho_1(t), x_2)$, on a $f_\rho(y_1, y_2) = f_{\rho_1}(y_1)$, donc $H(\rho) = H(\rho_1) \times X_2$. Ainsi la distorsion de $H(\rho)$ dans X est la même que celle de $H(\rho_1)$ dans X_1.*

L'implication $(\mathbf{P}_2) \Rightarrow (\mathbf{P}_3)$ découle maintenant du fait qu'une horosphère dans un immeuble euclidien de rang 1 (donc dans un arbre réel) est totalement disconnexe.
$(\mathbf{P}_3) \Rightarrow (\mathbf{P}_1)$: Soit $\mathbf{K}_1$ le facteur minimal tel que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ et $\rho \subset \mathbf{K}_1 \times \{x_2\}$ pour un $x_2 \in \mathbf{K}_2$. D'après $(\mathbf{P}_3)$, rang $\mathbf{K}_1 \ge 2$. On a $\rho(t) = (\rho_1(t), x_2)$ et $H(\rho) = H(\rho_1) \times \mathbf{K}_2$. Le rayon $\rho_1 \subset \mathbf{K}_1$ vérifie la propriété $(\mathcal{I})$, d'où la nondistorsion de $H(\rho_1)$ dans $\mathbf{K}_1$, ce qui implique la même chose pour $H(\rho)$ dans $\mathbf{K}$. $\diamondsuit$

4 Nondistorsion des horosphères dans des espaces symétriques

Le résultat sur la nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens obtenu dans la section précédente implique un résultat similaire sur la nondistorsion des horosphères dans des espaces symétriques :

Théorème 4.1. *Soit X un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 2 et soit $r \subset X$ un rayon. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
$(\mathbf{P}_1^*)$ *$H(r)$ avec la métrique de longueur est nondistordue dans X ;*
$(\mathbf{P}_2^*)$ *pour toute décomposition nontriviale $X = X_1 \times X_2$ telle que rang $X_1 = 1$, $r \not\subset X_1 \times \{x_2\}, \forall x_2 \in X_2$.*
Si r vérifie une de ces deux propriétés, la constante de nondistorsion de $H(r)$ avec la métrique de longueur ne dépend que de $p(r(\infty)) = \theta$.

4.1 Limites d'horosphères

On déduit le théorème 4.1 à partir du théorème 3.10 et du lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de rayons dans X, un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Soit $Con_\omega(X,(x_n),(d_n))$ un cône asymptotique quelconque de X et soit $\rho = [r_n]$ le rayon limite. On note f_ρ la fonction de Busemann de ρ dans $Con_\omega(X,(x_n),(d_n))$ et f_{r_n} la fonction de Busemann de r_n dans $(X, \frac{1}{d_n}\cdot d)$. Alors on a les égalités suivantes*

$$(a) \qquad \lim_\omega f_{r_n}(y_n) = f_\rho(y)\ ,\forall y = [y_n]$$

$$(b) \qquad [Hb(r_n)] = Hb(\rho), \rho = [r_n]$$

$$(c) \qquad [H(r_n)] = H(\rho).$$

Pour la preuve on utilise le résultat suivant:

Lemme 4.3. *Soit X un espace métrique géodésique $CAT(0)$. Si r et ρ sont deux rayons asymptotes, alors les fonctions de Busemann f_r et f_ρ correspondantes différent d'une constante :*

$$f_r - f_\rho = f_r(\rho(0)).$$

Pour une preuve de ce résultat voir **[BH]**, chapitre 2.

Preuve du lemme 4.2

Soit $y = [y_n]$ un point quelconque dans le cône asymptotique. Pour tout rayon $\rho = [r_n]$ du cône on a l'inégalité:

$$f_\rho(y) \geq \lim_\omega f_{r_n}(y_n), \tag{4.1}$$

car $f_\rho(y) = \lim\limits_{t\to\infty}(d(\rho(t),y)-t) = \lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{\omega}\dfrac{d(r_n(d_n\cdot t),y_n)-d_n\cdot t}{d_n} \geq \lim\limits_{\omega} f_{r_n}(y_n)$.

Soient maintenant r'_n les rayons asymptotes à r_n issus de y_n et $\rho' = [r'_n]$ le rayon limite dans le cône. D'après le lemme précédent on a :

$$f_{r_n} = f_{r'_n} + f_{r_n}(y_n) \text{ et } f_\rho = f_{\rho'} + f_\rho(y).$$

L'inégalité (4.1) appliquée à r'_n et ρ' donne :

$$\lim_\omega f_{r'_n}(r_n(0)) \leq f_{\rho'}(\rho(0)),$$

d'où :

$$-\lim_\omega f_{r_n}(y_n) \leq -f_\rho(y).$$

On peut conclure que $\lim_\omega f_{r_n}(y_n) = f_\rho(y)$.

D'où les égalités $[Hb(r_n)] = Hb(\rho)$ et $[H(r_n)] = H(\rho)$. $\diamondsuit$

4.2 Démonstration du théorème 4.1

L'implication $(\mathbf{P}_1^*)\Rightarrow(\mathbf{P}_2^*)$ est immédiate, avec la Remarque 4, car on sait que dans les espaces symétriques de rang 1 les horosphères sont distordues. On démontre $(\mathbf{P}_2^*)\Rightarrow(\mathbf{P}_1^*)$.

Soit X_1 le facteur minimal tel que $X = X_1 \times X_2$, $r \subset X_1 \times \{x_2\}, x_2 \in X_2$. Donc $r(t) = (r_1(t), x_2)$. D'après $(\mathbf{P}_2^*)$, le rang de X_1 est plus grand ou égal à 2. La Remarque 4 implique que la distorsion de $H(r)$ dans X est la même que celle de $H(r_1)$ dans X_1.

Dans X_1, r_1 vérifie la propriété

> $(\mathcal{I}_0)$ Pour toute décomposition nontriviale $X_1 = X_1^1 \times X_1^2$, $r_1 \not\subset X_1^1 \times \{x_2\}$, $\forall x_2 \in X_1^2$.

Il suffit donc de démontrer que $H(r)$ est nondistordue pour un rayon r dans un espace symétrique X qui vérifie la propriété $(\mathcal{I}_0)$ dans X.

Remarque 4.4. *On a des correspondances biunivoques entre les décompositions d'un système fondamental de racines en systèmes orthogonaux de racines, les décompositions du complexe de Coxeter associé à X en produit, $E = E_1 \times E_2$, et les décompositions de l'espace symétrique en produit, $X = X_1 \times X_2$. Donc une formulation équivalente pour la propriété $(\mathcal{I}_0)$ est :*

> $(\mathcal{I}_0')$ *Si W est une chambre de Weyl de sommet $r(0)$ qui contient r et π est le système fondamental de racines associé à W dans le plat maximal qui contient W, pour toute décomposition, $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$, en systèmes orthogonaux de racines, on ne peut pas avoir*
> $$\beta(r) = 0, \forall \beta \in \pi_1.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'on a une suite d'horosphères $H(r_n)$, où $p(r_n(\infty)) = \theta$ et r_n vérifie la propriété $(\mathcal{I}_0)$, et une suite de paires de points $x_n, y_n \in H(r_n)$ tels que $d_\ell(x_n, y_n) \geq n \cdot d(x_n, y_n)$.

En appliquant des isométries on peut se ramener à une seule horosphère, $H(r)$, où $p(r(\infty)) = \theta$ et r vérifie la propriété $(\mathcal{I}_0)$. On note $d(x_n, y_n)$ par d_n.
Pour chaque n on choisit le plus petit d_n pour lequel il existe des x_n et y_n dans $H(r)$ vérifiant $d(x_n, y_n) = d_n$, $d_\ell(x_n, y_n) \geq n \cdot d_n$. On voit que $d_n \to \infty$ car si on avait $d_n \leq d$, alors $d_\ell(x_n, y_n) \leq e^d d(x_n, y_n)$.
Dans $\mathbf{K} = Con_\omega(X, x_n, (d_n))$ on a les points $x = [x_n]$ et $y = [y_n]$, $d(x, y) = 1$. De plus, $[H(r)] = H(\rho)$, où $\rho = [r]$.

La propriété $(\mathcal{I}_0)$ du rayon r entraîne que ρ a la propriété $(\mathcal{I})$ dans $\mathbf{K}$.

On a vu lors de la preuve du théorème 3.10 qu'on peut trouver une ligne polygonale $x = P_0, P_1, P_2, \cdots, P_k, P_{k+1} = y$ incluse dans $H(\rho)$ telle que :

$$\Sigma_{i=1}^k d(P_{i-1}, P_i) \leq k \cdot d(x, y) = k. \tag{4.2}$$

Chaque segment $[P_i, P_{i+1}]$ se trouve dans une face d'une hypersurface polytopique obtenue comme $F \cap H(\rho)$, où F est un plat maximal, et chaque face d'une telle hypersurface est incluse dans un plat maximal qui contient une asymptote de ρ (voir la Remarque 3.3). Donc pour chaque $[P_i, P_{i+1}]$ il existe un plat maximal F_i tel que $[P_i, P_{i+1}] \subset F_i$ et $\rho(\infty) \in F_i(\infty)$.

Ainsi on peut voir $[P_i, P_{i+1}]$ comme ensemble limite d'une suite de segments $[\widetilde{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}]$ inclus dans des plats maximaux F_i^n qui contiennent une asymptote de r. Dans chaque F_i^n la trace de $H(r)$ est un hyperplan et on peut supposer que $[\widetilde{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}]$ se trouve dans cet hyperplan. Donc $d(\widetilde{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}) = d_\ell(\widetilde{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n})$.
On a trouvé pour chaque P_i deux suites qui le représentent : $(\widetilde{P_i^n})$ et $(\overline{P_i^n})$. Pour $i = 0$ on peut considérer que $\overline{P_0^n} = P_0^n$ et pour $i = k+1, \widetilde{P_{k+1}^n} = P_{k+1}^n$.

Donc on a :

$$\lim_\omega \frac{d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n})}{d_n} = 0. \tag{4.3}$$

Avec la manière dont on a choisi d_n, ceci implique que :

$$d_\ell(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}) \leq n \cdot d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}).$$

On a la suite d'inégalités : $n \cdot d_n \; < \; d_\ell(x_n, y_n) \; = \; d_\ell(P_0^n, P_{k+1}^n)$
$\leq d_\ell(P_0^n, \widetilde{P_0^n}) \; + \; d_\ell(\widetilde{P_0^n}, \overline{P_1^n}) \; + \; d_\ell(\overline{P_1^n}, \widetilde{P_1^n}) \; + \; d_\ell(\widetilde{P_1^n}, \overline{P_2^n}) \; + \cdots + \; d_\ell(\widetilde{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n}) \; +$
$d_\ell(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n) \leq n \cdot [d(P_0^n, \widetilde{P_0^n}) \; + \cdots + \; d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}) \; + \cdots + \; d(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n)] \; +$
$d(\widetilde{P_0^n}, \overline{P_1^n}) \; + \; d(\widetilde{P_1^n}, \overline{P_2^n}) \; + \cdots + \; d(\widetilde{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n})$.

On a obtenu :
$n \cdot d_n \; \leq n \cdot [d(P_0^n, \widetilde{P_0^n}) \; + \cdots + \; d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}) \; + \cdots + \; d(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n)] \; +$
$d(\widetilde{P_0^n}, \overline{P_1^n}) \; + \; d(\widetilde{P_1^n}, \overline{P_2^n}) \; + \cdots + \; d(\widetilde{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n})$.

Si on divise par $n \cdot d_n$ l'inégalité précédente et si on passe à la limite pour $n \to \infty$, vu les relations (4.2) et (4.3), on obtient $1 \leq 0$, donc une contradiction. ♢

5 Le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan pour les réseaux de Q -rang 1

Dans cette section on va démontrer le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan pour les réseaux de $\mathbb{Q}$-rang 1 par une méthode géométrique. On rappelle d'abord quelques définitions et propriétés élémentaires des réseaux de $\mathbb{Q}$-rang 1.

5.1 Généralités sur les réseaux de Q - rang 1 des groupes semisimples

Les principales références de cette section sont [**Ma**], [**Ra**], [**Bo**].

Soit un groupe algébrique réel semisimple de centre trivial et sans facteurs compacts $G = \prod_{i=1}^{s} G_i$. On sait qu'on peut aussi supposer que c'est un groupe linéaire $G \subset G\ell(n, \mathbb{R})$.

Le bord à l'infini, $\partial_\infty X$, de l'espace symétrique associé à G, $X = G/K$ avec la métrique de Tits est un immeuble sphérique ([**Mo**], chap.15 et 16, ou [**BGS**], Appendix 5). Ses appartements sont les bords à l'infini des plats maximaux.

Définition 5.1. *Un rayon géodésique $r \subset X$ est dit singulier ou régulier si $r(\infty)$ est un point singulier ou régulier de l'immeuble sphérique $\partial_\infty X$ au sens de la définition 2.6.*

A chaque point du bord $\alpha \in \partial_\infty X$ on peut associer un sous-groupe $P(\alpha) \subset G$ qui le fixe, c'est-à-dire qui fixe la classe de rayons asymptotes qui représente α. On appelle $P(\alpha)$ *le sous-groupe parabolique associé à* α. Son radical unipotent $U(\alpha)$ s'appelle *le sous-groupe unipotent associé à* α.

Remarque 5.2. *Soit F un plat maximal tel que $\alpha \in F(\infty)$ et soit A le $\mathbb{R}$-tore maximal qui fixe F et $\mathbf{a}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathbf{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{g}_{\lambda_i}$ la décomposition de $\mathbf{g}$, l'algèbre de Lie du groupe G, par rapport à $\mathbf{a}$. Le fait que $\alpha \in F(\infty)$ implique qu'il existe un rayon $r(t) = \exp tV(r(0))$ dans F tel que $r(\infty) = \alpha$, où $\exp tV$ est un sous-groupe uniparametré dans A, $V \in \mathbf{a}$.*

L'algèbre de Lie du groupe $P(\alpha)$ est $\mathbf{p}(\alpha) = \bigoplus_{\lambda_i(V) \geq 0} \mathbf{g}_{\lambda_i}$.

L'algèbre de Lie du groupe $U(\alpha)$ est $\mathbf{u}(\alpha) = \bigoplus_{\lambda_i(V) > 0} \mathbf{g}_{\lambda_i}$.

Parfois, quand on va considérer un rayon r dans l'espace symétrique, on va utiliser aussi les notations $P(r)$ et $U(r)$ pour les sous-groupes parabolique et unipotent associés à $r(\infty)$.

Soit Γ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang un dans le groupe semisimple G de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2 ([**Ma**], [**Pr**], [**GP**]). Par exemple, tous les réseaux irréductibles Γ dans des groupes semisimples $G = \prod_{i=1}^{s} G_i$ ayant au moins un facteur de $\mathbb{R}$-rang 1 sont des réseaux de $\mathbb{Q}$-rang 1([**Pr**], lemme 1.1).

Les groupes modulaires de Hilbert font partie de cette classe de réseaux.

Soit K un corps algébrique des nombres, totalement réel, de degré n au dessus de $\mathbb{Q}$ et soit ϑ_K l'anneau des entiers algébriques de K.

Le groupe $\Gamma_K = PSL(2, \vartheta_K)$ s'appelle *le groupe modulaire de Hilbert du corps K.* Le groupe Γ_K peut être plongé comme un réseau irréductible dans $G = PSL(2,\mathbb{R}) \times PSL(2,\mathbb{R}) \times \cdots \times PSL(2,\mathbb{R})$ (n fois), donc c'est un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un ([**VG**], chapitre 1).

Le résultat suivant montre que la géométrie des horosphères joue un rôle important dans la compréhension de la géométrie à grande échelle d'un réseau de $\mathbb{Q}$-rang un.

Théorème 5.3 ([Ra], th.13.12, [Pr], prop. 2.1). *Soit $\Gamma \subset G$ un réseau irréductible de $\mathbb{Q}$-rang 1 d'un groupe semisimple. Il existe $r_1, r_2, \cdots, r_k$ rayons dans l'espace symétrique associé à G, X, tels que*

(1) *$Hb(\gamma r_i) \cap Hb(r_j) = \emptyset$, si $i \neq j, \gamma \in \Gamma$ ou $i = j, \gamma \notin \Gamma \cap U(r_i)$.*

(2) *l'espace $X_0 = X \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} Hbo(\gamma r_i)$ a le quotient $\Gamma \backslash X_0$ compact.*

(3) *Tout sous-groupe unipotent maximal de* Γ *est de la forme* $\Gamma \cap U(\gamma r_i)$*, pour un* $\gamma \in \Gamma$ *et un* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *et est un réseau de* $U(\gamma r_i)$*.*

Définition 5.4. *On appelle* X_0 *l'espace associé à* Γ*.*

Toute horoboule correspond à un point dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$. Du fait que les horoboules $Hb(\gamma r_i)$ sont deux à deux disjointes, on peut en déduire que tous les points dans le bord à l'infini qui leur correspondent sont deux à deux opposés. En effet, si pour deux de ces points on prend l'appartement de $\partial_\infty X$ qui les contient, alors cet appartement est le bord à l'infini d'un plat maximal de X, et dans ce plat maximal on a deux rayons correspondant aux deux points. Les traces des deux horoboules dans ce plat sont des demi-plats déterminés par des hyperplans orthogonaux respectivement aux deux rayons. On voit alors que les deux demi-plats sont disjoints si et seulement si les deux rayons sont opposés.

On obtient le résultat suivant :

Proposition 5.5. *Soit* Γ *un réseau irréductible de* $\mathbb{Q}$*-rang 1 dans un groupe semisimple,* G*, de* $\mathbb{R}$*-rang plus grand ou égal à* 2*, et* $X = G/K$ *l'espace symétrique associé à* G*. Si* $R = \{r_1, r_2, \ldots r_k\}$ *est l'ensemble de rayons du théorème 5.3, alors :*

a) $\gamma r_i(\infty)$ *et* $r_j(\infty)$ *sont opposés ou égaux, pour tout* $i, j \in \{1, 2, \ldots k\}$ *et* $\gamma \in \Gamma$*.*

b) $p(\{\gamma r_i(\infty) \mid \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2, \ldots, k\}\})$ *est un point unique, qu'on va noter* θ *(ici* p *est la projection de l'immeuble sphérique* $\partial_\infty X$ *sur la chambre modèle).*

Preuve. On a démontré **a)**.

b) En général, si on a trois points deux à deux opposés α, β et γ dans $\partial_\infty X$, alors $p(\alpha) = p(\beta) = p(\gamma)$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $p(\alpha) \neq p(\beta)$.

Soit $\mathcal{F}$ un appartement de $\partial_\infty X$ qui contient α et β et soient $\mathcal{W}_\alpha$ et $\mathcal{W}_\beta$ deux chambres opposées de $\mathcal{F}$ telles que $\alpha \in \mathcal{W}_\alpha$ et $\beta \in \mathcal{W}_\beta$.

On considère les rétractions $\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\alpha}$ et $\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\beta}$. Le fait que $\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\alpha}$ préserve les distances à des éléments de $\mathcal{W}_\alpha$ implique que $d(\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\alpha}(\gamma), \alpha) = \pi$, donc que $\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\alpha}(\gamma) = \beta$.

De même on démontre que $\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\beta}(\gamma) = \alpha$.

D'après la propriété **(2)** de la Remarque 2.7 , on a :

$$p(\gamma) = p_{\mathcal{F}}\left(\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\alpha}(\gamma)\right) = p_{\mathcal{F}}(\beta) = p(\beta)$$
$$p(\gamma) = p_{\mathcal{F}}\left(\mathrm{retr}_{\mathcal{F},\mathcal{W}_\beta}(\gamma)\right) = p_{\mathcal{F}}(\alpha) = p(\alpha)$$

Mais $p(\alpha) \neq p(\beta)$, d'où la contradiction. ♢

Définition 5.6. *On appelle* θ *la direction associée à* Γ*.*

On peut faire, sur la position de θ dans Δ, l'affirmation suivante :

Proposition 5.7. *Soit* $r \in \{\gamma r_i \mid i \in \{1, 2, \ldots k\}, \gamma \in \Gamma\}$, $r = \exp tV(r(0))$*, où* $V \in \mathbf{g}$*, et soit* $\mathbf{a}$ *une sous-algèbre* $\mathbb{R}$*-diagonalisable maximale de* $\mathbf{g}$ *qui contient* V *et* $\pi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ *le système fondamental de racines associé à une chambre de Weyl qui contient* V*. Si* $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$ *est une décomposition en systèmes orthogonaux de racines, on ne peut pas avoir* $\mu(V) = 0$ *pour tout* μ *dans* π_1*.*

Preuve. D'après le théorème 5.3, **(3)**, si $U = U(r)$ est le sous-groupe unipotent associé à r, $\Gamma_1 = \Gamma \cap U$ est un sous-groupe unipotent maximal de Γ. De plus, Γ_1 est un réseau uniforme dans U. D'après le théorème 13.1 de [**Ra**], il faut que le centralisateur de U dans $G, Z(U)$, soit contenu dans U. D'où, si on note avec $\mathbf{u}$ l'algèbre de Lie associée à U, $\mathbf{z}(\mathbf{u}) = \{X \in \mathbf{g} | [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathbf{u}\} \subset \mathbf{u}$.

Si $\mu(V) = 0, \forall \mu \in \pi_1$, alors l'ensemble des racines strictement positives en V est inclus dans $\Lambda = \{\sum_{\lambda \in \pi_2} m_\lambda \cdot \lambda | m_\lambda \in \mathbb{N}^*\}$ (car π_1 et π_2 sont orthogonaux). Alors $\mathbf{u} \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{g}_\lambda$ d'après la Remarque 5.2.

Soit l'algèbre $\mathbf{a}' = \cap_{\lambda \in \pi_2} \ker \lambda$.

Pour tout $X \in \mathbf{a}'$ et pour tout $Y \in \mathbf{u}$ on a $Y = \Sigma_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, où $Y_\lambda \in \mathbf{g}_\lambda$, et alors $[X,Y] = \Sigma_{\lambda \in \Lambda}[X, Y_\lambda] = \Sigma_{\lambda \in \Lambda} \lambda(X) Y_\lambda = 0$.

D'où $\mathbf{a}' \subset \mathbf{z}(\mathbf{u}) \subset \mathbf{u}$, ce qui n'est pas possible car $\mathbf{a}'$ est une sous-algèbre $\mathbb{R}$-diagonalisable non-triviale tandis que $\mathbf{u}$ est une sous-algèbre formée par des éléments nilpotents. $\diamondsuit$

Corollaire 5.8. *Si $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, $rang_{\mathbb{R}} G_i = 1$ et si $\Gamma \subset G$ est un réseau irréductible, alors θ est un point régulier.*

Pour les groupes modulaires de Hilbert, par exemple, on a le résultat suivant :

Si K est un corps algébrique des nombres totalement réel, de degré n au dessus de $\mathbb{Q}$, son groupe modulaire de Hilbert, Γ_K, est un réseau irréductible dans $G = PSL(2,\mathbb{R})^n$. La chambre de Weyl modèle de G est dans ce cas un quadrant de la sphère S^{n-1} et la direction associée à Γ_K est le barycentre de ce quadrant([**VG**], chapitre 1).

5.2 Le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan

On rappelle l'énoncé du théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan ([**LMR**]$_1$ et [**LMR**]$_2$).

Théorème 5.9 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan). *Si G est un groupe de Lie semisimple de $\mathbb{R}$-rang plus grand ou égal à 2 et Γ est un réseau irréductible de G, alors Γ muni de la métrique des mots est nondistordu dans G muni d'une métrique invariante à gauche.*

La preuve de ce théorème pour Γ un réseau de $\mathbb{Q}$-rang 1 est une conséquence des résultats énoncés jusqu'ici. Car la nondistorsion de (Γ, d_w) dans G muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche est équivalente à la nondistorsion de X_0 muni de la métrique de longueur dans X. Et pour montrer que (X_0, d_ℓ) est nondistordu dans X, il suffit de le montrer pour les horosphères $H(\gamma r_i)$, car les horoboules $Hb(\gamma r_i)$ sont deux à deux disjointes.

La proposition 5.7 implique que tous les rayons γr_i, $\gamma \in \Gamma$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ vérifient la propriété $(\mathcal{I}_0')$, donc la propriété $(\mathcal{I}_0)$. Ceci et la propriété **b)** de la Proposition 5.5 impliquent qu'il existe un $M > 1$ tel que toutes les horosphères $H(\gamma r_i)$ avec les métriques de longueur sont M-nondistordues dans X. Il s'ensuit que (X_0, d_ℓ) est M-nondistordu dans X.

Bibliographie

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, "Manifolds of nonpositive curvature", Birkhäuser, 1985.

[BH] M. Bridson, A. Haefliger, "Metric Spaces of Nonpositive Curvature", en préparation.

[Bo] A. Borel, "Linear Algebraic Groups", deuxième édition, Springer Verlag 1991.

[Bou] N. Bourbaki, "Topologie générale", quatrième édition, Hermann, Paris, 1965.

[Br] K. S. Brown, "Buildings", Springer Verlag 1989.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe (eds), "Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov", Birkhäuser, 1990.

[Gr]$_1$ M. Gromov, *"Groups of polynomial growth and expanding maps"*, Publ. Math IHES **53** (1981), 53-73.

[Gr]$_2$ M. Gromov, *"Hyperbolic groups"*, in "Essays in group theory", S.Gersten editor, MSRI Publ. **8**, Springer (1987), 75-265.

[Gr]$_3$ M. Gromov, *"Asymptotic Invariants of Infinite Groups"*, "Geometric Group Theory"(vol. 2), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press 1991.

[GP] M. Gromov, P. Pansu, *"Rigidity of Lattices : An Introduction"*, "Geometric Topology : Recent Developments", P. de Bartolomeis, F. Tricerri (eds), Lecture Notes in Mathematics 1504, Springer-Verlag 1991.

[KL] M. Kapovich, B. Leeb, *"On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of nonpositively curved manifolds"*, Geometric and Functional Analysis **3**(1995), vol.5, 582-603.

[KlL] B. Kleiner, B. Leeb, *"Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings"*, preprint, april 1996.

[LMR]$_1$ A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, *"Cyclic subgroups of exponential growth and metrics on discrete groups"* , C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **317** (1993), 735-740.

[LMR]$_2$ A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, *"The word and riemannian metrics on lattices of semisimple groups"*, preprint.

[Ma] G. A. Margulis, "Discrete Subgroups of semisimple Lie Groups", Springer Verlag 1991.

[Mo] G. D. Mostow, "Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces", AMS Studies no.78, Princeton University Press 1973.

[Pr] G. Prasad, *"Strong rigidity of Q-rank one lattices"*, Inventiones math. **21** (1973), 255-286.

[Ra] M. S. Raghunathan, "Discrete Subgroups of Lie Groups", Springer Verlag 1972.

[Ti]$_1$ J. Tits, "Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs", Lecture Notes 386, Springer Verlag 1974.

[VDW] L. Van Den Dries, A. J. Wilkie, *"On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic"*, J. of Algebra **89** (1984), 349-374.

[VG] G. van der Geer, "Hilbert Modular Surfaces", Springer Verlag 1988